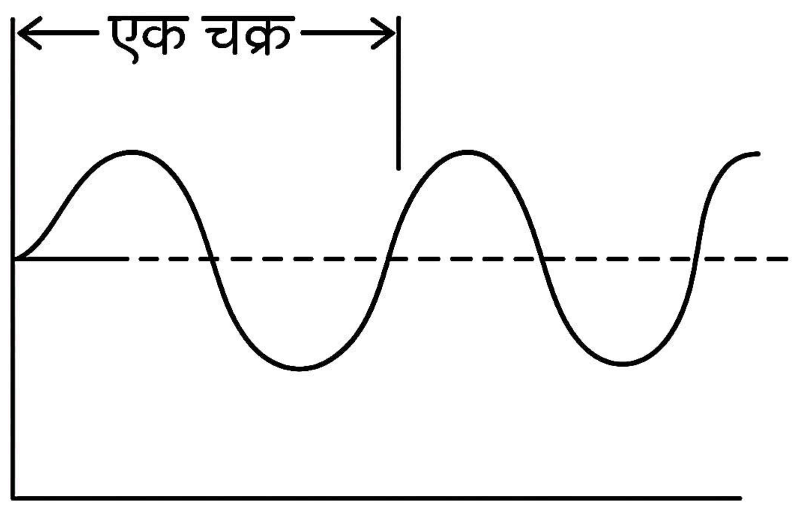
दोलन (दोलन और आवर्ती गति)

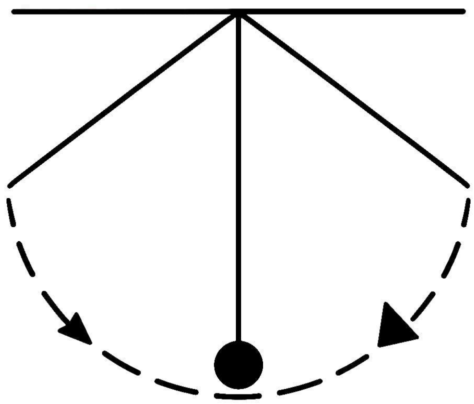
दोलन गति :- जब कोई पिंड एक निश्चित पथ पर किसी स्थिर बिन्दु के इधर - उधर एक नियत समय मे अपनी गति को बार-बार दोहराता है तो पिंड की इस गति को दोलन गति कहते हैं। इसे कंपन गति भी कहते हैं।

→ दोलन गति के उदाहरण

1. जब हम किसी रस्सी को दीवार से बांधकर रस्सी के दूसरे सिरे को हाथ से हिलाते है तो रस्सी में कंपन हो जाते हैं। अर्थात रस्सी एक निश्चित समय में अपनी गति को बार-बार ऊपर-नीचे दोहराती है। अतः रस्सी की यह गति दोलन गति है।



2. जब किसी रस्सी से पत्थर बांधकर उसके दूसरे सिरे को किसी वस्तु से बांध देते है एवं अब पत्थर को हिलाते हैं। तो पत्थर एक निश्चित बिन्दु के इधर-उधर निश्चित समय मे बार बार अपनी गति को दोहराता रहता है अतः पत्थर की यह गति दोलन गति है। चित्र सहित स्पष्ट



3. अन्य उदाहरण- हमारे घरो मे लगे घंटे की सूइयों की गति, सरल लोकल की गति, सिलाई मशीन की सुई की गति आदि।

प्रत्येक दोलन गति आवश्यक रूप से आवर्ती गति होती है। परंतु प्रत्येक आवर्त गति हो यह आवश्यक नहीं है। जैसे- पृथ्वी सूर्य के चारों ओर आवर्ती पृथ्वी की गति किसी निश्चित बिन्दु के इधर-उधर नहीं होती है।

आवर्त गति :- जब कोई पिंड किसी निश्चित पथ पर अपनी गति को एक निश्चित समयांतराल मे बार-बार दोहराता है तो पिंड की इस गति को आवर्त गति कहते हैं। आर्वत गति मे प्रयोग होने वाले समय अंतराल को आवर्तकाल कहते हैं। अर्थात वह समय अंतराल जिसके बाद वस्तु की गति की पुनरावृति होती है आवर्तकाल कहते हैं।

→ आवर्त गति उदाहरण

1. सूर्य की परिक्रमा करती हुई पृथ्वी की गति है। जिसका आवर्तकाल 1 वर्ष होता है।

2. घंटे में घुमती सुइयों की गति आवर्त गति है। सेकेंड वाली सुई का

आवर्तकाल । मिनट, मिनट वाली सुई का । घंटा तथा घंटे वाली सुई का आवर्तकाल 12 घंटे होता है।

3. पृथ्वी के चारो ओर परिक्रमा करते चन्द्रमा की गति आवर्त गति का उदाहरण है। जिसका आवर्तकाल 27.3 दिन होता है।

सरल आवर्त गति :- जब कोई पिंड समय स्थिति के इधर-उधर एक सरल रेखा मे गति करता है तो पिंड की इस गति को सरल आवर्त गति कहते है।

सरल आवर्त गति मे पिंड पर लगने वाला प्रत्यानयन बल प्रत्येक स्थिति मे पिंड के विस्थापन के अनुक्रमानुपाती होता है।

यदि पिंड पर लगने वाला प्रत्यानयन बल f तथा विस्थापन d हो तों

$$f \propto d$$

$$\boxed{f = -kd}$$

जहाँ K एक नियतांक है जिसें बल निम्तांक कहते है।

ऋणात्मक चिन्ह से पता चलता है कि बल की दिशा सदैव विस्थापन के विपरीत होती है।

एकसमान वृतिय गति के रूप में सरल आवर्त गति :- जब कोई पिंड किसी वृत की परिधी पर एकसमान कोणिय वेग से गति करता है तो पिंड से वृत के व्यास पर खीचें गए लंब के पाद (projection) की गति को सरल आवर्त गति कहते है।

सरल आवर्त गति की विशेषताएं

- पिंड की गति सीधी सरल रेखा मे किसी स्थिर बिन्दु के इधर-उधर होती है।

- सरल आवर्त गति करते हुए पिंड का वेग अधिकतम होता है।
- पिंड पर लगने वाला प्रत्यानयन बल विस्थापन के अनुक्रमानुपाति होता है।
- इन पर लगने वाले बल की दिशा सदैव स्थिर बिंदु की ओर होती है।
- पिंड पर त्वरण शून्य होता है।

सरल आवर्त गति का विस्थापन समीकरण :- माना एक कण p, a त्रिज्या के एक वृतिय पथ पर चक्कर लगा रहा है। माना कण बिन्दु B से चलना प्रारंभ करता है। तथा t सेंकेड मे कण Q कोण घूम जाता है।
यदि कण का कोणिय वेग W है तो

$$W = \frac{\theta}{t}$$

या $\theta = Wt$

यदि t सेकेंड में प्रक्षेप N का मूलबिन्दु 0 से विस्थापन Y है तो

$$Sin\theta = \frac{y}{a}$$

या $y = a \sin\theta$

θ का मान प्रस्तुत समीकरण में रखने पर

$$y = a \sin Wt$$

यह सरल आवर्त गति का विस्थापन समीकरण है।

सरल आवर्त गति संबंधी परिभाषाए

1. आयाम :- सरल आवर्त गति में विस्थापन के अधिकतम मान को उसका आयाम कहते हैं। इसे a से प्रदर्शित करते हैं।

2. आवृति :- एक सेकेंड मे कण द्वारा किए गए कंपनो की संख्या को उसकी आवृति कहते हैं। इसे n सें दर्शाया जाता हैं।

$$n = \frac{1}{T} = \frac{W}{2\pi}$$

3. आवर्तकाल :- सरल आवर्त गति में सर द्वारा एक कंपन को पूरा करने में लगे समय को उसका आवर्तकाल कहते हैं। इसे T से प्रदर्शित करते हैं।

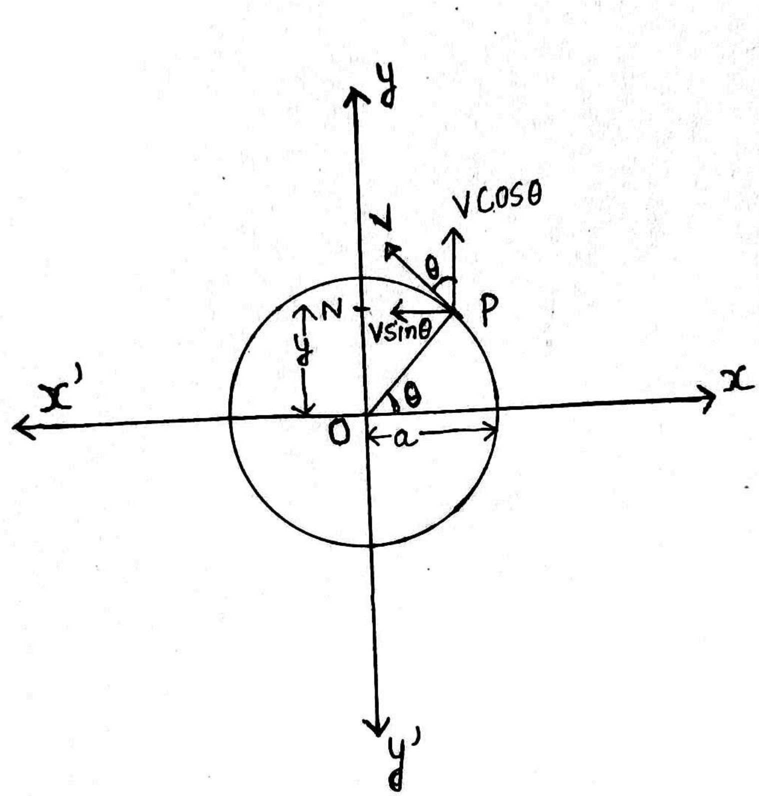
$$T = \frac{2\pi}{W}$$

4. सरल आवर्त गति का विस्थापन समीकरण

$$y = a \sin(Wt + \theta)$$

जहाँ θ कण की प्रारंभिक कला हैं।

सरल आवर्त गति में कण का वेग :- माना की एक कण वृत की परिधी गति कर रहा है तो उसके वेग V को दो घटको मे वियोजित कर सकते हैं।



क्षैतिज घटक = V sinθ

उर्ध्वाधिर घटक = V cosθ

यह उर्ध्वाधिर घटक = v cosθ

कण की गति N के समांतर है। अतः सरल आवर्त गति में कण का वेग u हो तो

$u = V\cos\theta$

$\theta = Wt$ तथा $V = rW$ रखने पर

$u = aW\cos wt$

$u = aW\sqrt{\cos^2 Wt}$

$u = aW\sqrt{1 - \sin^2 Wt}$

चूंकि $y = a\sin Wt$ तब $\sin Wt = \frac{y}{a}$ से

$$u = a\omega \frac{\sqrt{1 - y^2}}{a^2}$$

$$u = a\omega \times \frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{a}$$

$$\boxed{u = \omega \sqrt{a^2 - y^2}}$$

यह सरल आवर्त गति करते हुए पिंड के वेग का सूत्र है।

सरल आवर्त गति मे कण का त्वरण :- जब कोई कण किसी वृत की परिधी पर गति करता है तो उस पर एक अभिकेन्द्र बल कार्य करता है। इस बल को दो घटकों में वियोजित करने पर

क्षैतिज घटक $= \frac{v^2}{a} \cos\theta$

उध्वाधिर घटक $= \frac{v^2}{a} \sin\theta$

यहां क्षैतिज घटक कण की गति के समानान्तर है लेकिन विपरित दिशा मे है अतः सरल आवर्त गति में कण का वेग u हो तो

$$u = \frac{v^2}{a} \sin\theta$$

$y = a \sin\theta$ से $\sin\theta = \frac{y}{a}$ रखने पर

$$u = \frac{v^2}{a} \times \frac{y}{a} \sin\theta$$

$$u = \frac{v^2}{a} \times \frac{y}{a} \sin\theta$$

$$u = -\omega^2 y$$

(त्वरण α विस्थापन)

सरल आवर्त गति की उर्जा :- यदि M द्रव्यमान का एक कण सरल आवर्त गति कर रहा है तो मध्य स्थिति मे विस्थापन पर कण में स्थितिज व गतिज ऊर्जा दोनों होगी।

x विस्थापन पर स्थितिज ऊर्जा

$$v = \frac{1}{2} m w^2 x^2 = \frac{1}{2} K x^2$$

तथा गतिज ऊर्जा

$$K = \frac{1}{2} m w^2 (A^2 - x^2) = \frac{1}{2} k (A^2 - x^2)$$

कुल ऊर्जा $E = u + k$

$$E = u + k = \frac{1}{2} m W^2 A^2$$

यदि घर्षण नगण्य हो तो निकाय की कुल ऊर्जा सदैव नियत रहती है, जबकि स्थितिज एवं गतिज ऊर्जा में परिवर्तन होता रहता है।

सरल आवर्त गति निष्पादित करनें वाले कुछ निकाय

कमानी की दोलन :- जब किसी पिंड के किसी लटके हुए स्प्रिंग के निचले सिरे से बांध दिया जाता है तो पिंड कें भार के कारण वह स्प्रिंग नीचे की ओर झुकने लगता है। अर्थात स्प्रिंग की लम्बाई मे व्रद्धि हो जाती है। तो स्प्रिंग का आवर्तकाल

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

जहां m- वस्तु का द्रव्यमान

K- बल नियतांक

T- आवर्तकाल

चूँकि आवृति $n = \frac{1}{T}$ 'हो तों

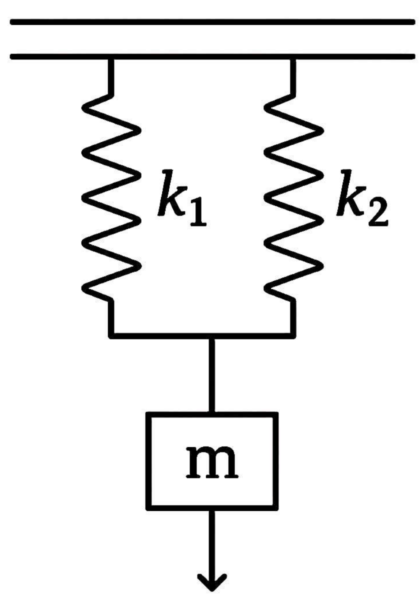
$$n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

या $2rn \sqrt{\frac{k}{m}}$

चूंकि $w = 2\pi n$ होता है तब

कोणिय वेग $= w = \sqrt{\frac{k}{m}}$

स्प्रिंग का समान्तर क्रम संयोजन :- माना दो स्प्रिंग है जिनको समांतर क्रम मे जोड़कर उनमें एक पिंड को लटकाया गया है।



माना दोनों स्प्रिंग के बल नियतांक K_1 व K_2 है जो एक दूसरे से भिन्न होगें जैसे चित्र में दिखाया गया है। यदि पिंड पर लगने वाला बल P है तो

$$P = -KY$$

अतः पहले स्प्रिंग के लिए

$f_1 = - K_1 y$

तथा दूसरी स्प्रिंग के लिए

$f_2 = - K_2 y$

अर्थात $f = f_1 + f_2$

या $Ky = K_1 y + K_2 y$

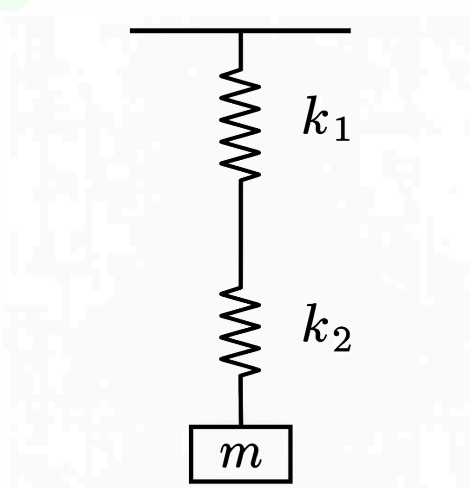
$K = K_1 + K_2$

जहां K तुल्य बल नियतांक है तो

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \text{ से}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1 + k_2}}$$

माना दो स्प्रिंग को श्रेणीक्रम मे जोड़कर किसी पिंड से लटकाया गया है। यदि दोनो स्प्रिंग के बल नियतांक K_1 व K_2 है। एवं यह एक दुसरे से भिन्न होगे। चित्र से स्पष्ट है।



माना पिंड पर लगनें वाला बल f तथा दोनो स्प्रिंग पर लगने वाला बल क्रमशः f_1 व f_2 हैं। तब यह बल एक - दुसरे के समान होगें। तो

$$f = f_1 = f_2$$

यदि पहले स्प्रिंग की लंबाई में वृद्धि y_1 व दूसरी स्प्रिंग की वृद्धि y_2 हो तो

$$y = y_1 + y_2$$

या $$\frac{f}{y} = \frac{f}{y_1} + \frac{f}{y_2}$$

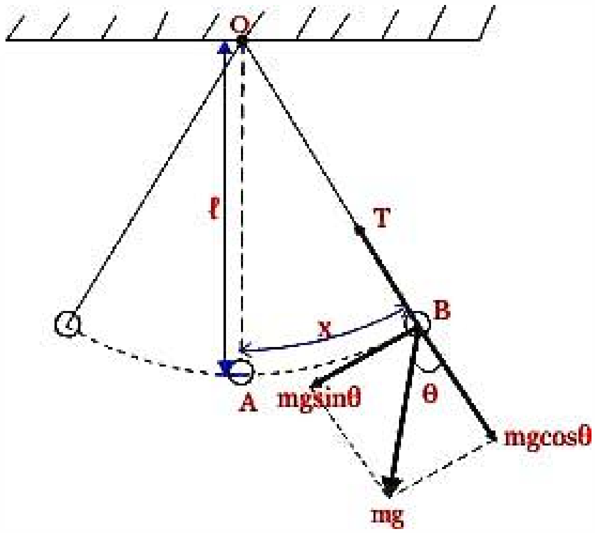
$$\frac{1}{y} = \frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2}$$

जहां K तुल्य बल नियतांक है तो

सूत्र $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1 + k_2}}$

सरल लोलक :- जब किसी छोटे और भारी पिंड को किसी भारहीन पिंड एवं लंबाई मे न बढ़ने वाले धागे के एक सिरे से पिंड को बाधकर धागे को किसी घर्षण रहीत से लटका दे। तो इस प्रकार बने समायोजन को सरल लोलक कहते हैं। सरल लोलक की गति सरल आवर्त गति का एक उदाहारण है। व्यवाहार मे यह समायोजन संभव नही है।

सरल लोलक के आवर्तकाल का व्यंजक



माना m द्रव्यमान के किसी गोलक को ℓ लम्बाई के धागे के किसी बिन्दु से लटकाया गया है। जब इस गोलक को साम्य स्थिति मे A से X दूरी विस्थापन करके छोड़ दिया जाता है। तो यह सरल लोलक दोलन करनें लगता है। यदि किसी क्षण बिन्दु B पर सरल लोलक की स्थिति में भार mg को दो घटको में वियोजित करने पर

क्षैतिज घटक = mg cosθ
उर्ध्वाधिर घटक = mg Sinθ

उर्ध्वाधिर घटक सदैव साम्य स्थिति की ओर होता है। अतः इसे प्रत्यानयन बल f कहते हैं।

तो f = -mg Sinθ

या $ma = -mg\left(\frac{x}{l}\right)$

$a = -g\left(\frac{x}{l}\right)$ समी॰ (1)

अतः a= -x

या त्वरण = -विस्थापन

यहां त्वरण सदैव विस्थापन के अनुक्रमानुपाती होता है। अतः सरल लोलक की

गति सरल आवर्त गति है।

तो समी (1) सें

$$a = g\left(\frac{x}{l}\right)$$

$$\frac{x}{a} = \frac{l}{g}$$

चूँकि सरल लोलक का आवर्तकाल

$T = 2\pi\sqrt{\frac{\text{विस्थापन}}{\text{त्वरण}}}$ होता है तो

भार mg को दो घटकों मे वियोजित करने पर

क्षैतिज घटक = mg Cosθ

उर्ध्वाधिर घटक = mg Sinθ

उर्ध्वाधिर घटक सदैव साम्य स्थिति की ओर होता है अतः इसे प्रत्यानयन बल f कहते हैं।

तो

$$f = -\ mg\ Sin\theta$$

या $ma= mg\left(\frac{x}{l}\right)$

$a= -g\left(\frac{x}{l}\right)$ समी (1)

अतः $a=-\ x$

या (त्वरण = -विस्थापन)

यहां त्वरण सदैव विस्थापन के अनुक्रमानुपाती होता है। अतः सरल लोलक की गति सरल आवर्त गति हैं।

तो समी (1) से

$$a = g\left(\frac{x}{l}\right)$$

$$\frac{x}{a} = \frac{l}{g}$$

चुंकि सरल लोलक का आवर्त $T = 2r\sqrt{\frac{\text{विस्थापन}}{\text{त्वरण}}}$ होता है

विस्थापन/त्वरण या $\frac{x}{a}$ का मान रखने रखने पर

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

यह सरल लोलक का आवर्तकाल का सूत्र है। सरल लोलक का आवर्तकाल पिंड के द्रव्यमान पर निर्भर नही करता है।

सेंकेड लोलक :- जब किसी लोलक का आवर्तकाल 2 सेंकेड होता है तो इस प्रकार की लोलक को सेंकेड लोलक कहते है। अतः सरल लोलक का आवर्तकाल के सूत्र से

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

चूंकि आवर्तकाल 2 सेंकेड है तो

$T = 2$ रखने पर

$$L = \frac{g}{\pi^2}$$

माना किसी स्थान पर $g = 9.8$ मीटर/सेंकड^2

$T = 2$ सेंकड हो तो

$$L = \frac{9.8}{(3.14)^2}$$

$L = 0.992$ मीटर

$L = 99.2$ सेमी

BoardStudy

अतः स्पष्ट होता है कि किसी सरल लोलक की लंबाई ११.2 सेमी कर दे तो उसका आवर्तकाल 2 सेंकेड होगा। तब उसे सेंकेड लोलक कहते है।

अवमंदित दोलन :- जब कोई वस्तु वायु तथा अन्य माध्यम में कंपन करती है तो वस्तु पर उसकी गति के विरुध कोई अवरोधी बल आरोपित हो जाता है।

अतः वस्तु की उर्जा का कुछ भाग इस अपरोधी बल के विरुध खर्च हो जाता है। जिस कारण वस्तु की उर्जा में लगातार धीरे- धीरे कमी होती रहती है। अर्थात वस्तु के दोलनो का आयाम धीरे-धीरे कम होता रहता है। और अंत में आयाम शून्य हो जाता है। अर्थात वस्तु कंपन करना बन्द कर देती है। अतः वस्तु के इन दोलनो को अवमंदित दोलन कहते है। इसमे वस्तु के दोलनो की आवृति भी घट जाती है।