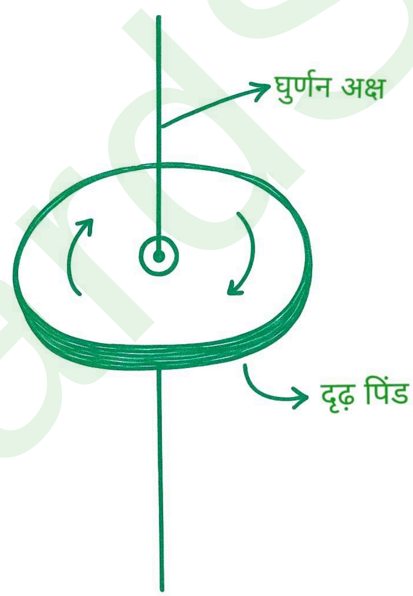
कणों के निकाय तथा घुर्ण गति

दृढ़ पिंड :- जब किसी पिंड पर बाह्य बल लगाने से यदि पिंड कणों मे कोई विस्थापन नही होता है तो एसे पिंड दृढ़ पिंड कहते हैं। **दृढ़ पिंड ठोस पदार्थ ही होते हैं।** जैसे पत्थर अदि।

घुर्णन गति :- जब कोई दृढ़ पिंड किसी अक्ष के परितः घूमता है तो पिंड गति को घूर्णन गति कहते है एवं इसके अक्ष को घूर्णन अक्ष कहते है।

घूर्णन गति मे पिंड का प्रत्येक कण एक वृतिय गति करता है।
उदाहरण :- .लट्टु की गति, पृथ्वी का चक्रण, छत के पंखे की गति आदि।



घूर्णन गति के समीकरण :- घूर्णन गति के समीकरण भी गति के समीकरण की तरह है। बस कुछ बदलाव होते हैं,
जैसें-

विस्थापन	S	θ

प्रारंभिक वेग	u	ω_o
अंतिम वेग	v	ω
त्वरण	a	α

1. घूर्णन गति का प्रथम समीकरण

$$\omega = \omega_o + \alpha t$$

2. घूर्णन गति का द्वितिय समीकरण

$$\theta = \omega_o + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

3. घूर्णन गति का तृतीय समीकरण

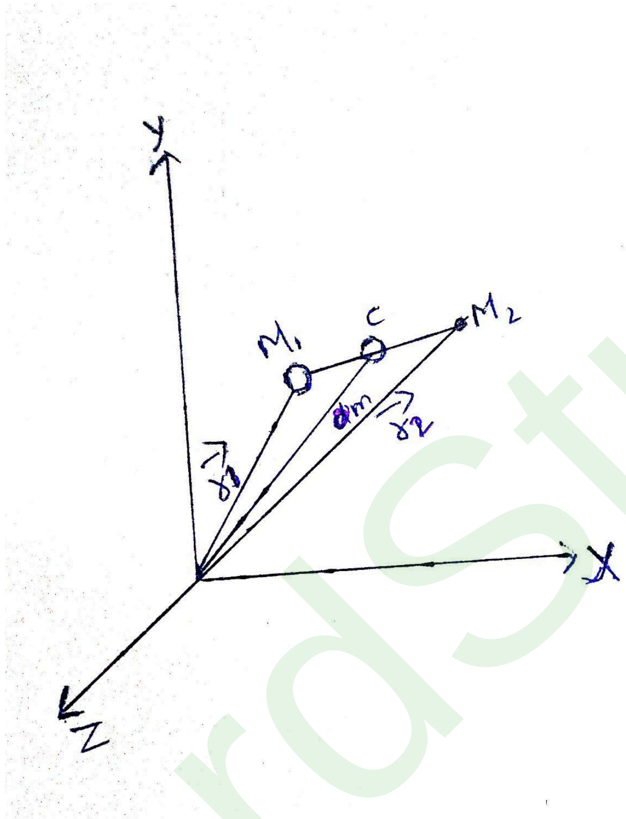
$$\omega^2 = \omega_o^2 + 2\alpha\theta$$

द्रव्यमान केन्द्र :- जब निकाय किसी बाह्य बल के अंतर्गत गति करता है। तब उसका कोई बिन्दु इस प्रकार गति करता है कि जैसे निकाय का समस्त द्रव्यमान इस बिन्दु पर केन्द्रित हो तथा बाह्य बल भी इस बिन्दु, पर आरोपित हो तो इस बिन्दु को निकाय का द्रव्यमान केन्द्र कहते है।

BoardStudy

इसे C द्वारा प्रदर्शित किया जाता है। यही द्रव्यमान केन्द्र की परिभाषा है।

दो कणो के निकाय का द्रव्यमान केन्द्र :- माना दो कण जिनका द्रव्यमान M_1 व M_2 है जिन्हें चित्र में बिन्दुओ सें दर्शाया गया है। यह दोनों कण एक ही निकाय में स्थित है।



→ मुलबिन्दु 0 फें सापेक्ष कणों के स्थिति सदिश क्रमशः $\vec{r}_1$ व $\vec{r}_2$ हैं यदि निकाय का द्रव्यमान केन्द्र C है तो इसका स्थिति सदिश निम्न होगा।

$$\vec{r}_{cm} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$

cm का मतलब द्रव्यमान केन्द्र हैं।

यदि निकाय में दो कण की जगह अनेक कण है तो निकाय का स्थिति

BoardStudy

सदिश निम्न होगा।

$$\vec{r}_{cm} = \frac{\int \vec{r}\, dm}{\int dm}$$

जहाँ dm सूक्ष्म अवयव का द्रव्यमान है एवं $\vec{r}$ इसका स्थिति सदिश है।

द्रव्यमान केन्द्र की गति :- माना कोई निकाय जिनमें n कण है। जिसके द्रव्यमान क्रमशः m_1 , m_2 , m_3 ..... m_n है। यदि मूलविन्दु के सापेक्ष इनके स्थिति संदिश क्रमशः $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$, $\vec{r}_3$ ...... $\vec{r}_n$ है।

तब निकाय के द्रव्यमान केन्द्र का स्थिति सदिश

$$\vec{r}_{cm} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3 + \ldots\ldots\ldots + m_n\vec{r}_n}{m_1 + m_2 + m_3 + \ldots\ldots\ldots + m_n}$$

$$\vec{r}_{cm} = \frac{1}{M}(m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3 + \ldots\ldots\ldots + m_n\vec{r}_n)$$

जहाँ M निकाय का कुल द्रव्यमान है।

द्रव्यमान केन्द्र का समय के साथ अवकलन करने पर

$$\frac{\vec{r}_{cm}}{dt} = \frac{1}{M}(m_1\frac{\vec{r}_1}{dt} + m_2\frac{\vec{r}_2}{dt} + m_3\frac{\vec{r}_3}{dt} + \ldots\ldots\ldots + m_n\frac{\vec{r}_n}{dt})$$

चूँकि वेग = दूरी/समय होता है तब

$$\vec{v}_{cm} = \frac{1}{M}(m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + m_3\vec{v}_3 + ... + m_n\vec{v}_n)$$

जहाँ $\vec{v}_{cm}$ द्रव्यमान केन्द्र का कुल वेग है।
यदि निकाय पर कार्यरत कुल बाह्य बल F_{ext} हो तों

$$F_{ext} = M\vec{a}_{cm}$$

जहाँ $\vec{a}_{cm}$ निकाय के द्रव्यमान केन्द्र का त्वरण है।

विलगित निकाय :- यह निकाय जिस पर कार्यरत समस्त बाह्य बल शून्य हो तो उस निकाय को विलगित निकाय कहते हैं। इसमें निकाय के द्रव्यमान केंद्र का वेग $\vec{V}_{cm}$ नियत रहता है चूँकि $\vec{F}_{ext} = 0$
तब

$$\vec{a}_{ext} = 0$$

अतः $\vec{V}_{cm}$ = नियतांक

कोणिय वेग और इसका रेखिए वेग से सम्बध

कोणिय वेग :- जब कोई किसी वृत की परिधी पर घूमता है तो इसका कोणिय विस्थापन समय के साथ परिवर्तन होता है अर्थात वृतिय गति करते हुए किसी कण के कोणिय विस्थापन की समय के साथ परिवर्तन की दर को कोणिय वेग कहते है। इसे ω से प्रदर्शित किया जाता है।

माना कोई कण जिसका Δt सूक्ष्म समयांतराल में कोणिय विस्थापन $\Delta\theta$ है तब कण का कोणिय वेग

$$\omega = \frac{\text{कोणिय विस्थापन}}{\text{समयांतराल}} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

यह कोणिय वेग का सूत्र है इसका **मात्रक रेडियन/सेकेण्ड** होता है। तथा कोणिय वेग की विमा $[M^0L^0T^{-1}]$ होती है।

चुँकि हम जानते है कि कोई कण एक वृतिय चक्कर पूरा करने पर 360° यानी 2π घुम जाता है। एवं इस पुर्ण चक्र में लगा समय कण का परिक्रमा काल (T) कहलाता है। तो कर्ण का औसत कोणिय वेग

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

या

$$\omega = 2\pi n$$

जहाँ n कण की आवृति है।

रेखिय वेग :- जब कोई कण रेखीय गति करता है तो उसका रेखीय विस्थापन समय के साथ परिवर्तित होता जाता है। अर्थात रेखीय गति करते हुए किसी कण के रेखीय विस्थापन की समय के साथ परिवर्तन की दर को रेखीय वेग कहते हैं।

माना कोई कण जिसका Δt सूक्ष्म समयांतराल मे रेखीय विस्थापन ΔS है तब कण का रेखिए वेग

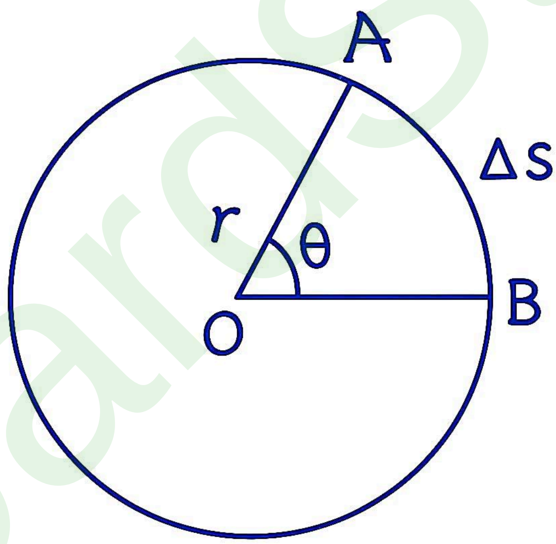
BoardStudy

$$V = \frac{\text{रेखीय विस्थापन}}{\text{समयांतराल}}$$

$$V = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

यह रेखिय वेग का सूत्र है इसका मात्रक मीटर/सेकेण्ड होता है। यह एक सदिश राशि है।

कोणिय वेग तथा रेखिय वेश में संबंध :- यदि कोई कण एक निश्चित त्रिज्या के वृत की परिधि पर एक समान चाल से चलता है। माना कण Δt समयांतराल में वृत की परिधि पर ΔS दूरी घूम जाता है। यदि कण का कोणिय विस्थापन $\Delta\theta$ हो तों



BoardStudy

कण का कोणिय वेग

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{r\,\Delta t} \quad (\text{चूँकि } \Delta\theta = \frac{\Delta s}{r})$$

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}\frac{1}{r}$$

$$\omega = v\frac{1}{r} \quad (\text{चूँकि } \frac{\Delta s}{\Delta t} = v)$$

$$\omega = \frac{v}{r}$$

$$\boxed{v = \omega r}$$

रखिय वेग = त्रिज्या x कोणिय वेग

कोणिय त्वरण :- घुर्णय अथवा कोणिय गति में कोणिय वेग के समय साथ परिवर्तन की दर को त्वरण कहते हैं। इसे α से प्रदर्शित करते हैं।

माना घूर्णन गति करते हुए पिंड पर किसी समय t_1 पर कोणिय वेग ω_1 तथा समय t_2 पर कोणिय वेग ω_2 हैं तो कोणिय त्वरण की परिभाषा से

$$\text{कोणिय त्वरण } \alpha = \frac{\text{कोणिय वेग परिवर्तन}}{\text{समयांतराल}}$$

$$\alpha = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} \qquad \alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

यह कोणिय त्वरण का सूत्र हैं। इसका **मात्रक रेडियन/(सेकेण्ड)²** होता है एवं विमिय सूत्र $[M^0L^0T^{-2}]$ होता है। कोणिय त्वरण एक सदिश

BoardStudy

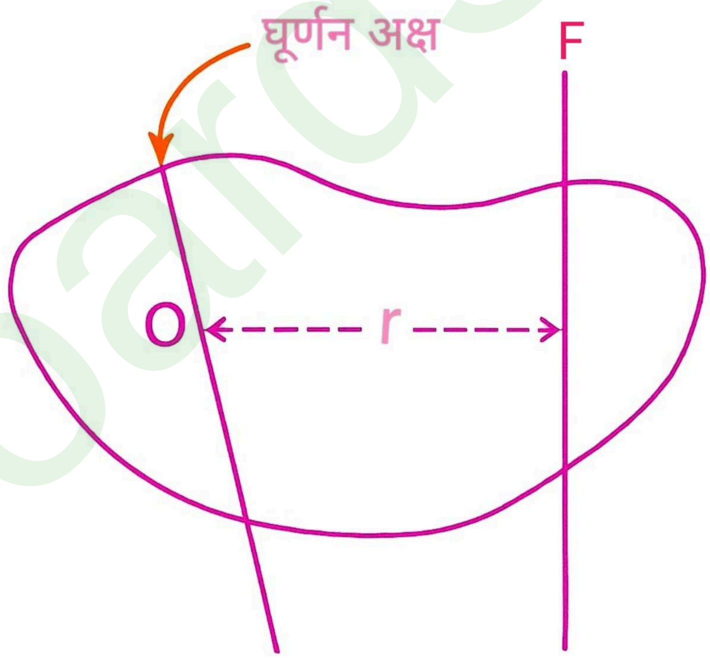
राशि है।

बल आघूर्ण एवं कोणिय संवेग

बल आघूर्ण :- किसी पिंड को अक्ष के परितः घूर्णन करने के लिए एक बल की आवश्यकता होती है इसे बल **आघूर्ण** कहते है।

अथवा किसी बाह्य बल द्वारा वस्तु को किसी अक्ष के चारों ओर घुमानें के प्रभाव को उसका बल आघूर्ण कहते है। इसे τ सें प्रदर्शित करते हैं।

इसका मान बल की क्रिया रेखा से घूर्णन अक्ष तक की दूरी तथा बल के गुणनफल के बराबर होता है।



परिभाषा से बल आघूर्ण का सूत्र

बल आघूर्ण τ = बल × बिन्दु 0 सें बल की लम्बवत दूरी

$$\tau = Fr$$

सदिश रूप में

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

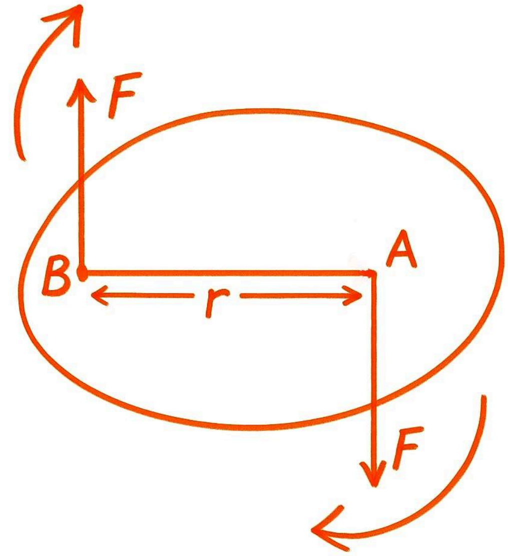
बल आघूर्ण का **मात्रक न्यूटन-मीटर** होता है। एवं इसका विमिय सुत्र [$ML^2 T^{-2}$] होता है। बल अघूर्ण एक सदिश राशि है।

बल आघूर्ण के दैनिक जीवन मे उदाहरण :- बल आघूर्ण के सूत्र से स्पष्ट होता है कि दुरी बढाने पर बल आघूर्ण का मान बढ़ जाता है। इसी आधार पर बल आघूर्ण के दैनिक जीवन मे अनेको उदाहरण है।

1. किवाड़ो पर हैंडल उसके कब्जे से दुर लगाए जाते है।
2. पेचकस का हत्थे चौड़ा बनाया जाता है जिससे पेंच कसने पर ज्यादा बल नही लगाना पड़े।

बल युग्म तथा बल युग्म का आघूर्ण :- जब किसी दृढ़ पिंड पर दो ऐसें बल लगाए जाए, जो परिमाण मे समान तथा दिशा में विपरित हो एवं जिनकी क्रिया रेखा भी भिन्न-भिन्न हो तो इस प्रकार के बलों को बल युग्म कहते है।

BoardStudy



बल युग्म के किसी बल के परिमाण तथा उसकी भुजा की लम्बाई के गुणनफल को बल युग्म का आघूर्ण कहते हैं। इसे C से प्रदर्शित करते हैं।
बल युग्म का आघूर्ण = बल × भुजा की दुरी

$$C = F \times r$$

बल युग्म के अघूर्ण को τ द्वारा भी दर्शाया जाता है। चूँकि यह बल आघूर्ण ही होता है।

कोणिय संवेग :- जिस प्रकार रेखिय गति के कण के द्रव्यमान तथा वेग के गुणनफल को कण का रेखीय संवेग कहते हैं। उसी प्रकार घूर्णन गति में , घूर्णन अक्ष के परितः कण के रेखीय संवेगो के आघूर्णों के योग को कण का कोणिय संवेग कहते हैं।

इसें d अथवा L द्वारा दर्शाया जाता हैं कोणीय संवेग एक सदिश राशि है। इसकी दिशा घूर्णन अक्ष के अनुदिश होती है। उपरोक्त परिभाषा के

अनुसार

$$\vec{d} = \vec{p} \times \vec{r}$$

कोणिय संवेग का मात्रक क्रिया - **(मीटर)^2/सेकेण्ड** अथवा **जुल-सेकेण्ड** होता है एवं विमीय सुत्र $[ML^2 T^{-1}]$ होता है।

कोणिय संवेग तथा जड़त्व आघूर्ण में संबंध :- माना कोइ पिंड ω कोणिय वेग से किसी अक्ष के परितः घूर्णन करता है। तो **पिंड के सभी कोणों का कोणिय वेग समान तथा रेखिय वेग भिन्न-भिन्न होगा** यदि किसी पिंड की घूर्णन अक्ष सें दुरी r_1 है तो उसका रेखिय वेग

$$v_1 = r_1 \omega$$

माना पिंड के किसी कण का द्रव्यमान m_1 हैं तो उसका रेखिय संवेग

$$P_1 = m_1 v_1$$

$$P_1 = m_1 r_1 \omega$$

इसका कोणिय संवेग

$$d_1 = P_1 \times r_1$$

$$d_1 = (m_1 r_1 \omega) \times r_1$$

$$d_1 = (m_1 r_1^2 \omega)$$

इसी प्रकार अन्य कणों के कोणिय संवेग क्रमश :

$(m_1 r_1^2 \omega)$, $(m_2 r_2^2 \omega)$, $(m_3 r_3^2 \omega)$, ... होगें

अतः पुरे पिंड का कोणिय संवेग

$$d = d_1 + d_2 + d_3 + ...$$

$$d = (m_1 r_1^2 \omega) + (m_2 r_2^2 \omega) + (m_3 r_3^2 \omega) + ...$$

$$d = \omega(m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + ...$$

अतः $d = I\omega$

कोणिय संवेग = जड़त्व आघूर्ण × कोणिय वेग

यही कोणिय संयोग तथा जड़त्व आघूर्ण के बीच संबंध का सूत्र हैं।

कोणिय संवेग एवं बल आघूर्ण मे संबंध :- माना कोई पिंड बाह्य बल आघूर्ण के अंतर्गत किसी अक्ष के परितः घूर्णन गति कर रहा हैं। तो इसका कोणिय त्वरण α हैं। यदि पिंड का कांणिय वेग ω तथा कोणिय संवेग L है तो सुत्र सें

बल आघूर्ण = जड़त्व आघूर्ण × कोणिय त्वरण

$$\vec{\tau} = I\vec{\alpha}$$

चूँकि कोणिय त्वरण $\alpha = \frac{d\omega}{dt}$ है तब

$$\tau = I(\frac{d\omega}{dt})$$

$$\boxed{\tau = \frac{d(I\omega)}{dt}}$$

कोणिय संवेग तथा जड़त्व आघूर्ण के संबंध सें

$$L = I\omega$$

तों $\tau = \frac{dL}{dt}$

अर्थात **किसी पिंड के कोणिय संवेग के परिवर्तन की दर उस उस पिंड पर आरोपित बल आघूर्ण के बराबर होती है।**
यही कोणिय संवेग एवं बल आघूर्ण मे संबंध है।

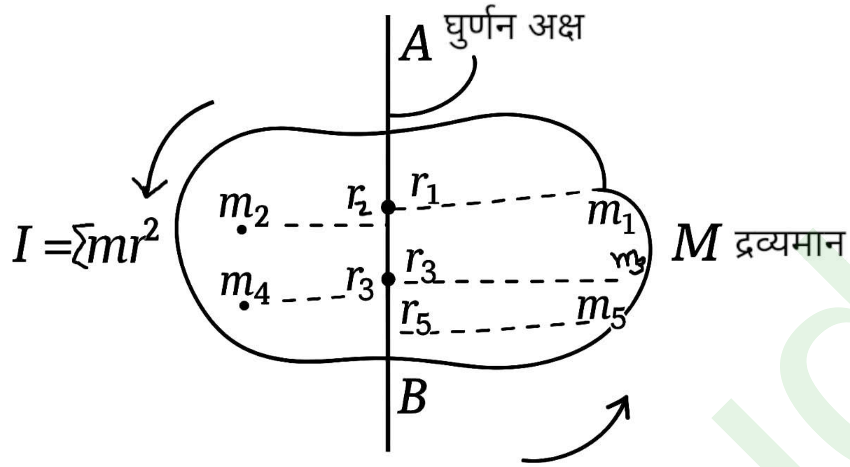
जड़त्व आघूर्ण :- सरल रेखिए गति में न्यूटन के प्रथम नियमानुसार, यदि कोई वस्तु विराम की अवस्था मे है तो वह विरामावस्था में ही रहेगी अथावा यदि कोई वस्तु एकसमान चाल से सीधी रेखा में चल रही है तो वह चलती ही रहेगी। जब तक उस पर कोई बाह्य बल न लगाए जाए, इस बाह्य बल के कारण वस्तु अपनी अवस्था परिवर्तन का विरोध करती है वस्तु के इस गुण को जड़त्व कहते हैं।

इसी प्रकार घूर्णन गति में कोई पिंड किसी अक्ष के परितः किसी कोणिय वेग से घूर्णन करता है। तो उसमें अपनी अवस्था परिवर्तन का विरोध करने का एक गुण होता है। जिसके कारण पिंड अपनी प्रारंभिक अवस्था में बनें रहने का प्रयास करता है। पिंड के इस गुण को जड़त्व आघूर्ण कहते है। इसे I प्रदर्शित करते है।

इस प्रकार हम देखतें है कि रेखीय गति में जो महत्व जड़त्व का है। वही महत्व कोणिय गति में जड़त्व आघूर्ण का है। दोनों में अंतर सिर्फ यह है कि **जड़त्व वस्तु का केवल द्रव्यमान पर निर्भर करता है जबकि जड़त्व आधुर्ण द्रव्यमान के साथ उसकी घूर्णन अक्ष से दुरी पर भी निर्भर करता है।**

BoardStudy

जड़त्व आघूर्ण का सूत्र :- पिंड के किसी कण का जड़त्व आघूर्ण उस कण का द्रव्यमान तथा उसकी घूर्णन अक्ष से दूरी के वर्ग के गुणनफल के बराबर होता है। अर्थात



माना M द्रव्यमान का एक पिंड अक्ष के परितः घुर्णन कर रहा है, माना पिंड छोटे-छोटे कणों से मिलकर बना है। जिनके द्रव्यमान क्रमशः m_1 , m_2 , m_3.....है एवं इनकी घूर्णन अक्ष सें दूरी क्रमशः r_1 , r_2 , r_3.....है तो

पहले कण का जड़त्व आघूर्ण $I_1 = M_1 r_1^2$
दूसरे कण का 'जड़त्व आघूर्ण $I_2 = M_2 r_2^2$
तीसरे कण का जड़त्व आघूर्ण $I_3 = M_3 r_3^2$

(इसी प्रकार आगे भी)

यदि पुरें पिंड का घूर्णन अक्ष के परितः जड़त्व अघूर्ण I हैं तों

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + \ ......$$

$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + ...$$

$$\boxed{I = \sum mr^2}$$

BoardStudy

अतः इस समीकरण द्वारा स्पष्ट होता है कि **किसी पिंड का किसी अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण, पिंड के प्रत्येक कण कें द्रव्यमान तथा उसकी घूर्णन अक्ष से दूरी के वर्ग के गुणनफल के बराबर होता है।**

जड़त्व आघूर्ण का SI मात्रक किग्रा-(मीटर)^2 होता है। एवं विमिय सूत्र [ML^2T^0] तथा इसका C.G.S पद्धति में मात्रक **ग्राम-(सेमी)^2** होती है और **जड़त्व आघूर्ण न तो सदिश राशि है और न ही अदिश।** यह एक प्रदिश रासि है। टेंसर राशि का मान अलग-अलग दिशाओं के लिए अलग-अलग होता है।

जड़त्व आघूर्ण का भौतिक महत्व :- किसी पिंड का जड़त्व आघूर्ण उसकी घूर्णन गति में वही कार्य करता है जो उसका द्रव्यमान रेखीय गति में करता है क्योंकि किसी पिंड का द्रव्यमान ही उसके जड़त्व की माप है।

अन्य अंतर किसी पिंड का जड़त्व केवल उसके द्रव्यमान पर निर्भर करता है। जबकि पिंड का **जड़त्व आघूर्ण पिंड के द्रव्यमान एवं घूर्णन अक्ष के चारो ओर द्रव्यमान के वितरण पर भी निर्भर करता है।** यही जड़त्व आघूर्ण भौतिक महत्व है।

कुछ महत्वपूर्ण आकृतियों के जड़त्व आघूर्ण के सूत्र →

1. वृत्ताकार छल्ला या वलय $I = mr^2$
2. वृताकार डिस्क $I = \frac{1}{2} mr^2$
3. ठोस बेलना $I = \frac{1}{2} mr^2$

4. ठोस गोला $I = \frac{2}{5} mr^2$

5. खोखला गोला (गोलीय कोश) $I = \frac{2}{3} mr^2$

घूर्णन त्रिज्या :- यदि पिंड के सम्पूर्ण द्रव्यमान को किसी एक बिंदु पर केंद्रित माना जाए एवं जिसकी घूर्णन अक्ष से लम्बवत दूरी इतनी हो कि अगर दूरी के वर्ग को पिंड के द्रव्यमान से गुणा करे तो घूर्णन अक्ष के परितः पिंड का जड़त्व आघूर्ण प्राप्त हो जाए। तो इस दूरी को घूर्णन त्रिज्या कहते है। इसे K से प्रदर्शित करते है।

माना M द्रव्यमान के किसी पिंड का जड़त्व आघूर्ण I है तब

$$\boxed{I = MK^2}$$

$$K = \sqrt{\frac{I}{M}}$$

अतः किसी पिंड का घूर्णन अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण तथा उसके द्रव्यमान के अनुपात का वर्गमूल उस पिंड की घुणर्न त्रिज्या कहलाती है।

लम्बवत एवं समान्तर अक्षो के प्रमेय :- जड़त्व आघूर्ण संबंधी प्रमेय दो प्रकार की होती है-

1. समान्तर अक्षों की प्रमेय
2. लम्ब अक्षों की प्रमेय

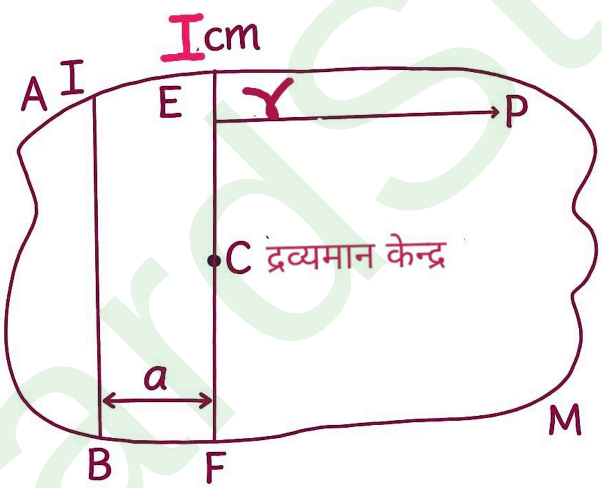
1. समान्तर अक्षों की प्रमेय :- किसी पिंड का किसी घूर्णन अक्ष के

परितः जड़त्व आघूर्ण (I) उस पिंड के द्रव्यमान केन्द्र (c) मे सें गुजरनें वाली समान्तर अक्ष के परितः पिंड के जड़त्व आघूर्ण (I_{cm}) तथा उसके द्रव्यमान और दोनों समान्तर अक्षों के बिच की लम्बवत दुरी के वर्ग गुणनफल के योग के बराबर होता है।

अर्थात

$$I = I_{cm} + Ma^2$$

जहां M पिंड का सम्पूर्ण द्रव्यमान तथा a दोनों पक्षों के बिच की दूरी है। इसे समान्तर अक्षों की प्रमेय कहते है।



माना एक पिंड जिसका द्रव्यमान केन्द्र c है। इससे गुजरनें वाली अक्ष EF के परितः जड़त्व आघूर्ण I_{cm} है। अक्ष AB के समानतर है तथा इसके बिच की दूरी a है माना अक्ष EF से r दूरी पर M द्रव्यमान का एक कण है तो इस कण की अक्ष AB से दूरी (a+r) होगी।

तो, कण का EF अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण I_{cm}

अतः सम्पूर्ण पिंड का EF अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण

$$I_{cm} = \sum mr^2$$

एवं सम्पूर्ण पिंड का AB अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण

$$I = \sum m(r+a)^2$$

$$I = \sum m(r^2 + a^2 + 2ra)$$

$$I = \sum mr^2 + \sum ma^2 + \sum m(2ra)$$

चूँकि a नियत है इसलिए इसे $\sum$ से बाहर ले सकते है।

$$I = \sum mr^2 + a^2\sum m + 2a \sum mr$$

अब $I = I_{cm} + a^2\sum m + 2a\sum mr$

चूँकि द्रव्यमान केन्द्र के परितः $\sum mr = 0$ एवं $\sum m = M$ है।

तब **$I = I_{cm} + Ma^2$**

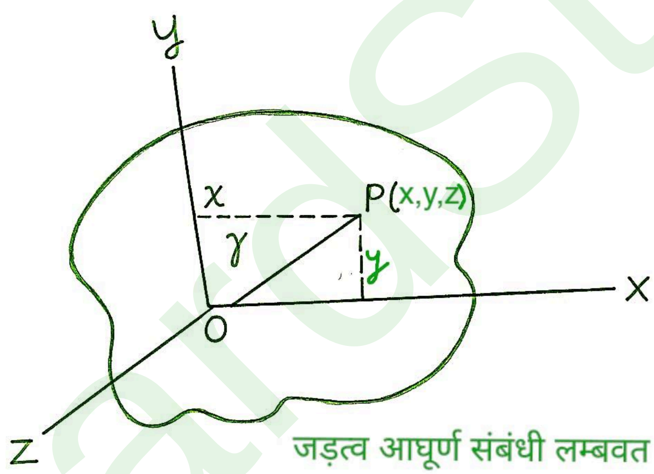
BoardStudy

यही जड़त्व आघूर्ण संबंधी समान्तर अक्ष की प्रमेय है।

2. लम्ब अक्षों की प्रमेम :- किसी समतल पटल का उसके तल मे ली गयी परस्पर दो अक्षों 0X तथा 0Y के परितः जड़त्व आघूर्ण का योग इन अक्षों के कटान बिन्दु 0 से जाने वाली तथा समतल पटल के लम्बवत अक्ष 0Z के परितः जड़त्व आघूर्ण के बराबर होता है अर्थात

$$I_X + I_Y = I_Z$$

जहाँ I_X तथा I_Y पटल की अक्ष 0X व 0Y के परितः जड़त्व आघूर्ण है। इसे लम्ब अक्षो की प्रमेय कहते है।



जड़त्व आघूर्ण संबंधी लम्बवत अक्ष की प्रमेय

माना समतल पतल के तल मे दो परस्पर लम्बवत अक्ष 0X व 0Y है। चित्र मे P बिंदु पर पिंड का एक कण है जिसका द्रव्यमान M है एवं इसकी कटान बिन्दु से दूरी r है तो पूरे पटल का 0X अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण $I_X = \sum my^2$ इसी प्रकार पटल का 0Y अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण

$I_y = \sum mx^2$

अतः OZ अक्ष के परितः पूरें पतल का जड़त्व आघूर्ण

$I_z = mr^2$

$I_z = \sum m(x^2 + y^2)$ (चुँकि $r^2 = x^2 + y^2$)

$I_z = \sum mx^2 + \sum my^2$

अतः $\sum mx^2$ तथा $\sum my^2$ के मान रखने पर

$I_z = I_y + I_x$

$$\boxed{I_z = I_x + I_y}$$

यही जड़त्व आघूर्ण संबंधी लम्ब अक्षो की प्रमेय है।

अचल अक्ष के परितः घुर्णी गति का कोणिय संवेग

कोणिय संवेग संरक्षण का नियम :- यदि किसी अक्ष के परितः घुमते हुए पिंड पर कोई बाह्य बल आघूर्ण का आरोपित न हो तो उस पिंड का कोणिय संवेग नियत रहते है इसे कोणिय संवेग संरक्षण का नियम कहते है। अर्थात

$$\boxed{d = I\omega = \text{नियतांक}}$$

उत्पत्ति :- कोणिय संवेग तथा बल आघूर्ण के संबंधं से हमने पढ़ा है कि घूर्णन अक्ष के परितः किसी पिंड के कोणिय संवेग परिवर्तन के दर उस पिंड पर आरोपित बाह्य बल आघूर्ण के बराबर होती है।

अतः $\tau = \frac{dL}{dt}$

यदि बाह्य बल आघूर्ण शून्य हो तो $\tau = 0$

$$\tau = \frac{dL}{dt} = 0$$

तथा $dL = 0$ (चूँकि समय शुन्य नही हो सकता है।)

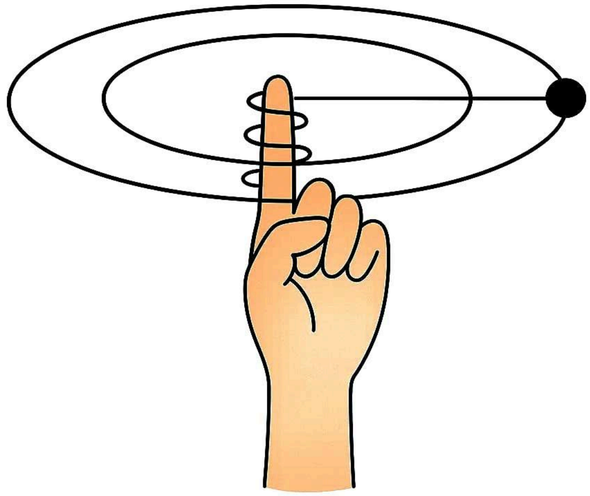
अर्थात

$$\boxed{L = \text{नियतांक}}$$

यह है संवेग संरक्षण का नियम है।

उदाहरण- 1. यदि हम किसी हल्के पिंड को धागे से बांधकर एवं धागे को हाथ से इस प्रकार क्षैतिज तल मे घुमाया जाए की धागा उंगली पर लिपट रही हो जैसे चित्र मे दिखाया गया है। तब इस स्थिति मे पिंड का कोणिय वेग (ω) बढ़ता जाता है। क्योंकि धागा लिपटते समय पिंड तथा उंगली के बीच की दूरी कम होती जाती है। इससे पिंड अधिक तेजी से घूमने लगता है इसलिए पिंड का घूर्णन अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण (I) घटता जाता है।

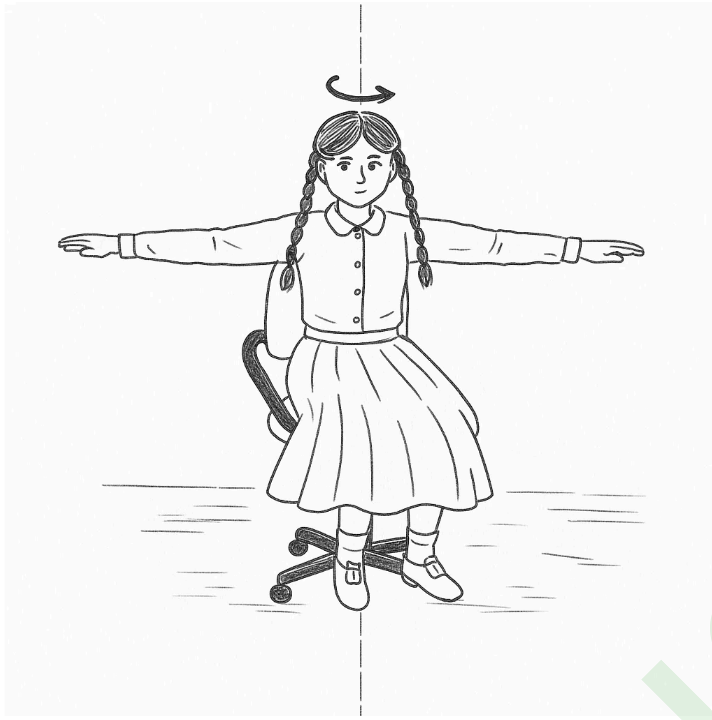
BoardStudy



अतः संवेग संरक्षण के नियम से पिंड का कोणिय वेग भी बढ़ता जाता है।

2. जब कोई तैराक उँचाई से पानी मे कुदता है तो वह अपने शारीर को सीधा रखने की बजाय अपने हाथ पैरो को सिकोड़ लेता है। जिससे उसका जड़त्व आघूर्ण (I) कम हो जाता है। चूँकि कोणिय संवेग ($I\omega$) का मान नियम रहता है। अतः जड़त्व आघूर्ण के घटने से कोणिय का वेग (ω) का मान बढ़ जाता है। तथा जल में गिरने के कुछ समय पहले ही वह गोताखोर अपने शरीर को सीधा कर लेता है।

3. डांसिंग बोर्ड पर स्कट्स पहनकर नाचने वाला व्यक्ति नाचते समय अपने हाथों को सिकोड़ लेता है। जिससे उसका जड़त्व आघूर्ण (I) का मान कम हो जाता है। परिमाणस्वरूप कोणिय वेग बढ़ जाता है। जिस कारण पर व्यक्ति तेजी से घूमने लगता है।



गुरुत्व केन्द्र :- किसी पिंड का वह बिन्दु जंहा से उस पिंड का सम्पूर्ण भार केन्द्रीत होता है। वह बिन्दु उस पिंड का गुरुत्व केन्द्र कहलाता है। यह बिन्दु पिंड के अन्दर अथवा बाहर भी हो सकता है। इस उदाहरण द्वारा अच्छी तरह समझा जा सकता है।

1. फुटबॉल खिलाडियो को आपने देखा होगा कि वह बॉल को अपनी उंगली पर घूमा देते है। यह कैसें सभंव होता है। वास्तव मे वह खिलाड़ी बॉल में एक ऐसा बिन्दु तलाश कहतें हैं। जहाँ से बाँल का संतुलन बनाया जा सके अर्थात सारा भार केंद्रित हो सके, यही बिन्दु बॉल का केन्द्र होता है।

2. परकार द्वारा किसी लड़की को गोल काटनें पर परकार की जहां नोक होती है। उस पर उसका केन्द्र बिन्दु होता है। उस बिन्दु पर अगर हम रस्सी बांधकर उसको उपर की ओर उठाते हैं। तो पुरी गोल लकड़ी सही संतुलन ऊपर उठ जाएगी।

BoardStudy

गुरुत्व केन्द्र अलग-अलग आकृतियो के लिए अलग-अलग जगह होता है। यहा कुछ आकृतियाँ दी गयी है।

1. गोलें का गुरुत्व केन्द्र :- किसी गोले का गुरुत्व केन्द्र जहां गोले का केन्द्र होता है वही उसका केन्द्र कहलाता है।

2. बेलने का गुरुत्व केन्द्र :- किसी बेलन की ऊँचाई की आधी दुरी पर बेलन का गुरुत्व केन्द्र होता है।
जैसे : किसी बेलन की उँचाई h है तो उसका गुरुत्व केन्द्र h/2 ऊँचाई पर होगा।

गुरुत्व केन्द्र व द्रव्यमान केन्द्र मे अंतर :- किसी वस्तु का गुरुत्व केन्द्र तथा उसका द्रव्यमान केन्द्र कोई जरूरी नही कि एक ही स्थान पर हों। यह दोनों पद अलग-अलग हैं। इन दोनो का प्रयोग अलग-अलग परिस्थितियों में होता है।

वास्तव में द्रव्यमान केन्द्र का संबंधं वस्तु कें द्रव्यमान से ही होता है चाहे वस्तु को किसी भी स्थान पर ले जाए उसका द्रव्यमान नियत रहता है। लेकिन गुरुत्व केन्द्र किसी वस्तु का वह बिन्दु होता है जहा से वस्तु के भार की क्रिया रेखा गुजरती है। लेकिन उसका मान सभी जगह समान नही रहता है। क्योंकि किसी वस्तु के भार का निर्धारिण उस वस्तु के द्रव्यमान तथा उस स्थान पर गुरुत्वीय त्वरण के मान पर निर्भर करता है।

BoardStudy

कम आकार या छोटी वस्तुओं के द्रव्यमान केन्द्र व गुरूत्व केन्द्र के लिए हम कह सकते है कि यह दोनों एक ही बिन्दु होगे। लेकिन बड़े आकार की वस्तुओं के लिए द्रव्यमान केंन्द्र व गुरुत्व केन्द्र दोनों अलग-अलग होगे।

जैसे : उचे पर्वत तथा महासागर इनके द्रव्यमान केन्द्र एक ही बिन्दु नही होते हैं। दोनों अलग-अलग होते हैं।

BoardStudy