समतल मे गति

1. एक समान सदिश :- ऐसे सदिश जिनकें परिमाण तथा दिशा समान होते हैं एक समान या समतुल्य सदिश कहलाते हैं।

उदाहरण : $\vec{A} = \vec{B}$

2. असमान सदिश :- ऐसे सदिश जिनकी दिशा तो समान व परिमाण अलग- अलग होते हैं। असमान सदिश कहलाते हैं।

उदाहरण : $\vec{A} \neq \vec{B}$ परंतु $\hat{A} = \hat{B}$ और $|\vec{A}| = |\vec{B}|$

शून्य सदिश :- ऐसें सदिश जिनका परिमाण शून्य होता हैं। शून्य सदिश कहलाते हैं।

1. किसी सदिश मे शून्य सदिश की गुणा करने पर शून्य ही प्राप्त होता हैं।

उदाहरण : $\vec{A} \cdot \vec{0} = \vec{0}$

2. यदि किसी सदिश मे शून्य सदिश जोड़ने पर सदिश राशि अपरिवर्तित रहती हैं।

उदाहरण : $\vec{A} + \vec{0} = \vec{A}$

3. यदि दो विपरित सदिशो को आपस मे जोड़ा जाए तो शून्य सदिश ही प्राप्त होता हैं।

उदा० : $\vec{A} = -\vec{B}$

BoardStudy

$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{0}$$

$$-\vec{B} + \vec{B} = \vec{0}$$

५.यदि किसी शून्य सदिश में किसी संख्या की गुणा कर दें तो शून्य सदिश ही प्राप्त होता है।

उदा० : $n \cdot \vec{0} = \vec{0}$ { जहाँ $n = 1,2,3,4,5,6,7$---------}

विपरित सदिश :- ऐसें सदिश जिनकें परिमाण तो समान व दिशा विपरित सदिश कहलाते हैं।

उदा० : $\vec{A} = -\vec{B}$

एकांक सदिश :- ऐसा सदिश जिनका परिमाण एक या एकांक हो। एकांक सदिश कहलाता है।

एकांक सदिश को अंग्रेजी वर्णमाला के छोटे अक्षर के उपर केप लगाकर व्यक्त करते हैं।

किसी सदस्यर को उसको परिमाण से भाग देने पर एकांक सदिश प्राप्त होता है।

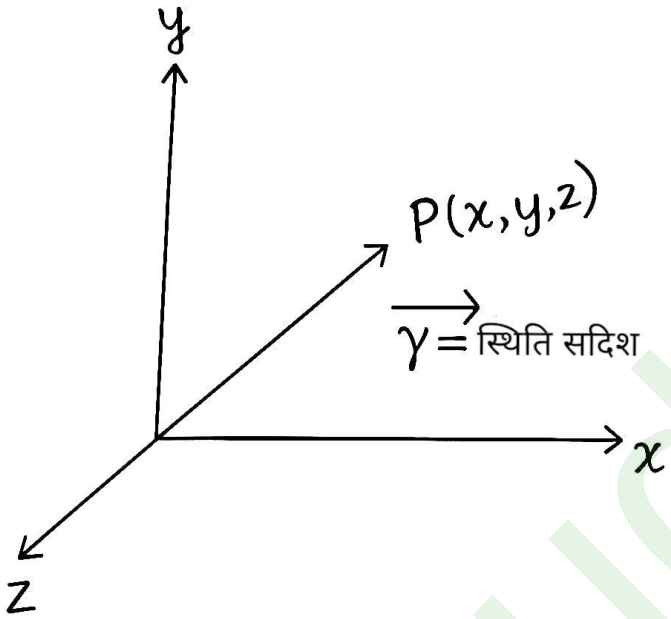
माना किसी सदिश $\vec{r}$ का परिमाण = $|\vec{r}|$ या r है

तो एकांक सदिश $\hat{r} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$

एकांक सदिश की दिशा सदिश राशि के समानांतर होती हैं।

BoardStudy

स्थिति सदिश :-

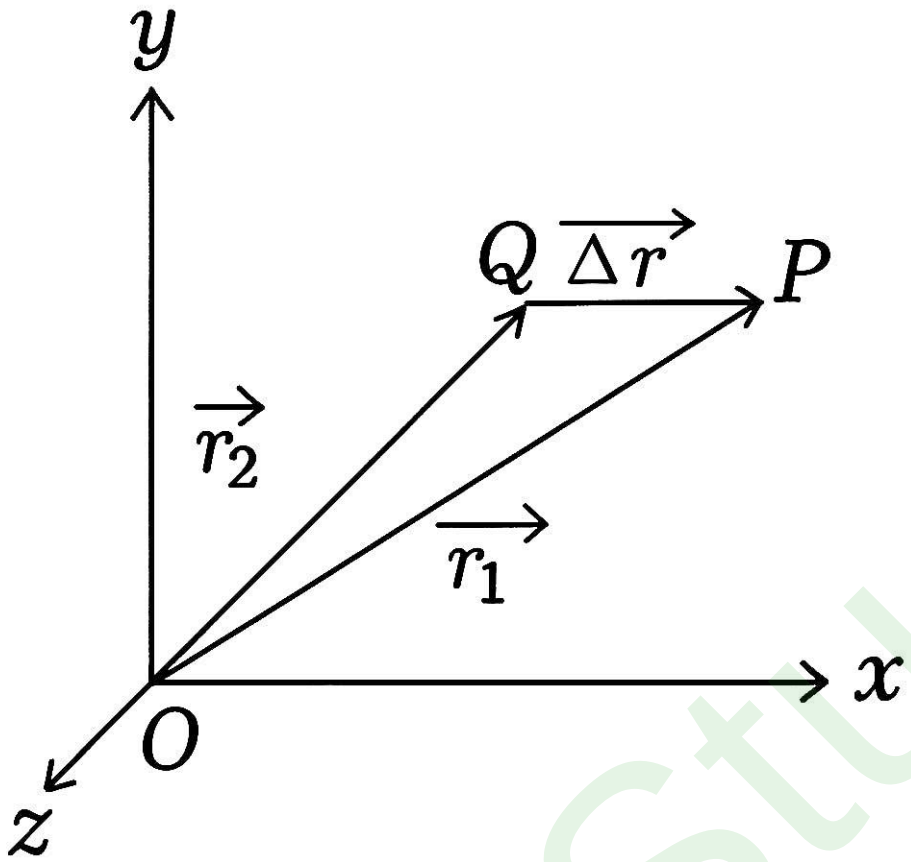


मूल बिन्दु से किसी कण की स्थिति को स्थिति सदिश की सहायता से व्यक्त करते हैं।

जैसे चित्र के मूल बिन्दु 0 से किसी कण P की स्थिति को स्थिति सदिश $\vec{OP} = \vec{r}$ से निरूपित किया।

विस्थापन सदिश :-

BoardStudy



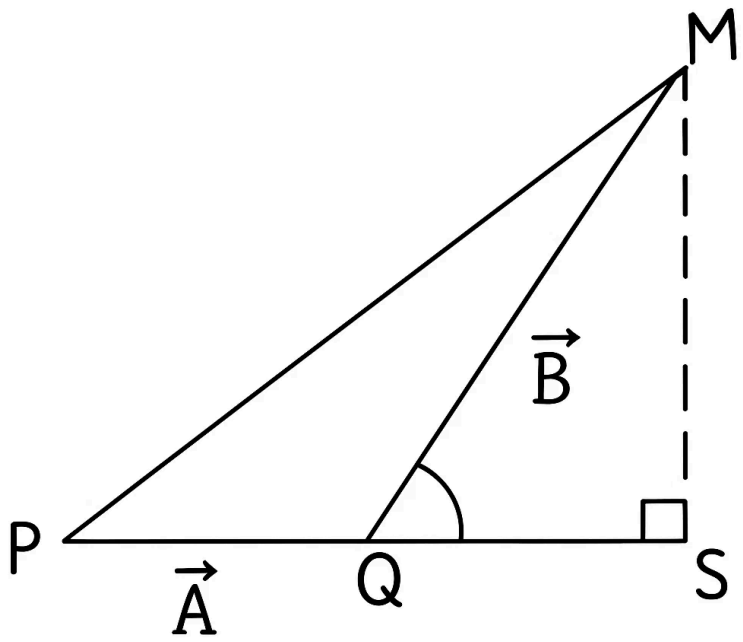
यदि किसी क्षण t पर कण P की मूल बिन्दु 0 से स्थिति $\vec{r}_1$ हैं। तथा क्षण t' पर कण की स्थिति $\vec{r}_2$ हो जाती हैं। कणो की स्थिति का अन्तर विस्थापन सदिश कहलाता हैं। इसे $\vec{\Delta r}$ से व्यक्त करते हैं।

$$\vec{r}_1 + \vec{\Delta r} = \vec{r}_2$$

$$\vec{\Delta r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

सदिश राशियों का संकलन (जोड़ना): गणितीय तिथि

BoardStudy



माना दो सदिश $\vec{A}$ व $\vec{B}$ को सीधे क्रम मे जोड़ा गया हैं। त्रिभुज के नियमानुसार इन सदिशो को विपरित क्रम में जोड़ने वाली भुजा सदिशो के परिमाण को व्यक्त करती हैं। सदिशो का परिणामी भी सदिश होता हैं। रेखा PQ को आगे बढ़ाते हैं तथा बिन्दु M से उसके ऊपर एक लम्ब डालते हैं। समकोण $\triangle PMS$ में

पाइथागोरस प्रमेय से,

$$(\text{कर्ण})^2 = (\text{लम्ब})^2 + (\text{आधार})^2$$

इसलिए $PS = PQ + QS$ .....(1)

$PM^2 = (PQ + QS)^2 + (MS)^2$ {समीकरण 1 से}

इसलिए $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$

$PM^2 = PQ^2 + QS^2 + 2PQ \cdot QS + MS^2$ .....(2)

$\triangle QMS$ मे

$$\sin\theta = \frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}}$$

BoardStudy

$$Sin\theta = \frac{MS}{QM}$$

$$MS = QM \cdot Sin\theta$$

$$MS = \vec{B} \; Sin\theta$$

$$Cos\theta = \frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}}$$

$$Cos\theta = \frac{QS}{QM}$$

$$QS = QM \cdot Cos\theta$$

$$QS = \vec{B} \; Cos\theta$$

समीकरण 2 में PQ, QS तथा MS के मान रखने पर

$$\vec{R}^2 = \vec{A}^2 + (\vec{B}\, Cos\theta)^2 + 2\vec{A}.\vec{B}\, Cos\theta + (\vec{B}\, Sin\theta)^2$$

$$\vec{R}^2 = \vec{A}^2 + 2\vec{A}\,\vec{B}\, Cos\theta + (\vec{B}\, Cos\theta)^2 + (\vec{B}\, Sin\theta)^2$$

$$\vec{R}^2 = \vec{A}^2 + B^2\,(Cos^2\theta + Sin^2\theta) + 2\vec{A}\,\vec{B}\, Cos\theta$$

$$\vec{R}^2 = \sqrt{\vec{A}^2 + \vec{B}^2\,(Cos^2\theta + Sin^2\theta) + 2\vec{A}\,\vec{B}\, Cos\theta}$$

$$\vec{R}^2 = \sqrt{\vec{A}^2 + \vec{B}^2 + (1)\; 2\vec{A}\,\vec{B}\, Cos\theta}$$

$$\vec{R} = \sqrt{\vec{A}^2 + \vec{B}^2 + 2\vec{A}\, B\, Cos\theta}$$

विशेष स्थितियाँ →

1.यदि $\theta = 0°$

$$R = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB Cos\theta}$$

BoardStudy

$$R = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB Cos0}$$

$$R = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\,(1)}$$

$$R = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB}$$

इसलिए $(A+B)^2 = A^2 + B^2 + 2AB$

$$R = \sqrt{(A + B)^2}$$

$$\mathbf{R_{max} = (A+B)}$$

यदि दोनों सदिश समान दिशा मे होगें तो उनका परिणामी अधिकतम होगा।

2. यदि $\theta = 90°$

$$R = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\,Cos\theta}$$

$$R = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\,Cos90^{\circ}}$$

$$R = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\,(0)}$$

$$R = \sqrt{A^2 + B^2}$$

3. यदि $\theta = 180°$

$$R = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\,Cos\theta}$$

$$R = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\,Cos180^{\circ}}$$

BoardStudy

$$R = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\,(-1)}$$

$$R = \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB}$$

इसलिए $(A-B)^2 = A^2 - B^2 - 2AB$

$$R = \sqrt{(A - B)^2}$$

$$R_{min} = (A - B)$$

प्रक्षेप्य गति :- यदि किसी वस्तु को आकाश मे निश्चित वेग से फेफा जाए तथा वस्तु पृथ्वी के गुरुत्वीय क्षेत्र के भीतर गति करे तो फेकी गयी वस्तु प्रक्षेप्य तथा वस्तु की गति कहलाती हैं।
उदा :- हवा में फेफी गयी गेंद की गति

फुटबॉल की गति आदि वस्तु की प्रक्षेप्य गति का सर्वप्रथम उल्लेख वैज्ञानिक गैलिलियों ने किया था। इन्होंनें अपने लेख मे प्रक्षेप्य गति के क्षैतिज एवं उर्ध्वाधिर घटकों की स्वतंत्र प्रकृति का उल्लेख किया था।

प्रक्षेप्य गति का अध्ययन सरलतापूर्वक करने के लिए निम्न दो अभिधारणाए दी गयी:-

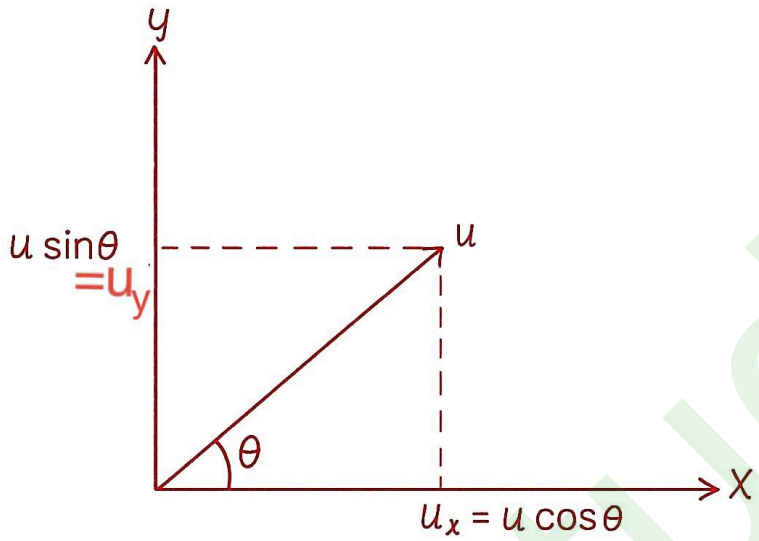
1. गुरुत्वीय त्वरण का नाम नियत व दिशा उर्ध्वाधिर नीचें की ओर होनी चाहिए।
2. वायु कें प्रतिरोध को नगण्य मानना चाहिए।

प्रक्षेप पथ :- $u_y = u\ Sin\theta$

BoardStudy

$$u_x = u\ Cos\theta$$

माना कोई प्रक्षेप्य θ कोण पर u वेग से उर्ध्वाधिर दिशा मे फेंका गया हैं।



फेफी गयी वस्तु में गुरुत्व के कारण लगने वाले त्वरण की दिशा सदैव नीचें की ओर होता हैं।

वस्तु फें प्रारम्भिक वेग के निम्न घटक होंगें

1. क्षेतिज घटक $u_x = u\ cos\theta$ .....(1)

2.उर्ध्वाधिर घटक $u_y = u\ sin\theta$ .....(2)

वस्तु मे उत्पन्न त्वरण के घटक निम्न प्रकार होगें-

1. क्षेतिज घटक $u_x = 0$

2.उर्ध्वाधिर घटक $u_y = g$

गति के प्रथम समीकरण सें

$$v = u + at$$

BoardStudy

क्षैतिज तल मे गति के लिए

दुरी = चाल × समय

$S_x\ (x) = u_x\ t$ (इसलिए $u_x = u\ Cos\theta$)

$\mathbf{S_x\ (x) = u\ cos\theta\ t}$ .....(3)

या $t = \frac{s(x)}{u\ Cos\theta}$ .....(4)

उर्ध्वाधर गति के लिए-

$\mathbf{S_y\ (y) = u_y\ t - \frac{1}{2} g\ t^2}$ .....(5) (इसलिए $a_y = -g$)

गति के प्रथम समीकरण से

$V = u + at$

$V_y = u_y - gt$

$\mathbf{V_y = u\ Sin\theta - gt}$

प्रक्षेप्य द्वारा प्राप्त अधिकतम ऊँचाई →

माना प्रक्षेप्य को अधिकतम ऊँचाई प्राप्त करने में t_1 समय लगता है।

$V_Y = u_y + a_y\ .\ t$ {इसलिए $V_Y = 0$ }

दिया है, $u_y = uSin\theta$

$a_y = -g$

$t = t_1$

तब $0 = usin\theta - gt_1$

$gt_1 = usin\theta$

$t_1 = \frac{usin\theta}{g}$ .....(i)

BoardStudy

$\{ s = ut + \frac{1}{2} at^2 \}$

$H_{max} = u_y t_1 - \frac{1}{2} g t_1^2$ .....(ii)

समीकरण (ii) में समीकरण (i) से t का मान रखने पर

$H_{max} = u\sin\theta . \frac{u\sin\theta}{g} - \frac{1}{2} g \left(\frac{u\sin\theta}{g}\right)^2$

$H_{max} = u^2 \, Sin^2\theta . \left(\frac{1}{g} - \frac{1}{2} g . \frac{1}{g^2} \right)$

$H_{max} = u^2 \, Sin^2\theta \, . \left(\frac{1}{g} - \frac{1}{2g}\right)$

$\boldsymbol{H_{max}} = \frac{u^2 sin^2\theta}{2g}$

स्थिति-I यदि $\theta = 90°$ हो तो

$H_{max} = u^2 \left(\frac{sin90 \; x \; sin90}{2g}\right)$

$H_{max} = \frac{v^2}{2g}$ {क्योकि $Sin90° = 1$}

प्रक्षेप्य काल या उडियन काल :- चूँकि वस्तु गुरुत्व के अधिन गति कर रही है। **अतः वस्तु को जितना समय ऊपर जाने में लगता है, ठीक उतना ही समय नीचे आने मे लगेगा।**

BoardStudy

तब उड़ियन काल :-

$$T = t_1 + t_1$$

$$T = 2t_1 \text{ (चूँकि } t_1 = \frac{usin\theta}{g})$$

$$T = \frac{2usin\theta}{g}$$

प्रक्षेप्य की परास :- किसी प्रक्षेप्य को जिस समतल से फेंका जाता है वापस उसी समतल मे आने मे प्रक्षेप्य द्वारा क्षैतिज तल में तय की गयी दूरी परास कहलाती हैं।

दूरी = चाल × समय

$R = u_x \times T$ ..... (1)

(चूँकि $T = \frac{2usin\theta}{g}$)

{चूँकि $u_x = u\ cos\theta$}

$$R = u\ cos\theta . \frac{2usin\theta}{g}$$

$$R = \frac{2u^2\ cos\theta\ sin\theta}{g}$$

$$R = \frac{u^2\ 2sin\theta\ cos\theta}{g}$$

{चूँकि $Sin2\theta = 2Sin\theta Cos\theta$}

$$R = \frac{u^2\ Sin2\theta}{g}$$

स्थिति I - यदि $\theta = 45°$

$$R = \frac{u^2\ sin\theta\ (45\ x\ 2)}{g}$$

BoardStudy

$$R = \frac{u^2 \sin\theta\,(90)}{g} \qquad (\text{चूँकि } \sin(90) = 1)$$

$$R_{max} = \frac{u^2}{g}$$

अर्थात किसी प्रक्षेप्य को अधिकतम दूरी तक प्रेक्षित करने के लिए उसे 45° के कोण पर प्रेक्षित करना चाहिए।

अधिकतम ऊँचाई एवं अधिकतम परास में सम्बंध

हम जानते हैं

$$H_{max} = \frac{u^2}{2g}$$

$$\text{या} \quad H_{max} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{u^2}{g}\right)$$

चूँकि $R_{max} = \frac{u^2}{g}$

$$H_{max} = \frac{1}{2} \times R_{max}$$

किसी समतल मे गति :- इस भाग मे हम सदिशों की सहायता से दो या तीन विमा में होने वाली गति का अध्ययन करेगें।

I.स्थिति सदिश :- किसी समतल मे स्थिति कण P का स्थिति सदिश $\vec{r}$ है। स्थिति सदिश को निम्न समीकरण की सहायता से व्यक्त कर सकतें हैं।

$$\vec{r} = x\,\hat{i} + y\,\hat{j}$$

BoardStudy

2. विस्थापन सदिश :- किसी वस्तु की अंतिम स्थिति तथा प्रारम्भिक स्थिति के अंतर को विस्थापन कहते हैं।

माना कोई कण किसी क्षण t_1 पर बिन्दु P पर स्थित है। तथा क्षण t_2 पर वह बिन्दु Q पर पहुंच जाता है।

सदिश योग की त्रिभुण विधि से

ΔOQP में

$$\vec{OQ} = \vec{OP} + \vec{PQ}$$

$$\vec{r_2} = \vec{r_1} + \vec{\Delta r}$$

$$\vec{\Delta r} = \vec{r_2} - \vec{r_1}$$

(चूँकि $\vec{r} = x\,\hat{i} + Y\,\hat{j}$)

अतः $\vec{r_1} = x_1\,\hat{i} + Y_1\,\hat{j}$

अतः $\vec{r_2} = x_2\,\hat{i} + Y_2\,\hat{j}$

समीकरण I में $\vec{r_1}$ व $\vec{r_2}$ के मान रखने पर

$$\vec{\Delta r} = x_2\,\hat{i} + Y_2\,\hat{j} - (x_1\,\hat{i} + Y_1\,\hat{j})$$

$$\vec{\Delta r} = x_2\,\hat{i} + Y_2\,\hat{j} - x_1\,\hat{i} - Y_1\,\hat{j}$$

$$\vec{\Delta r} = \hat{i}\,(x_2 - x_1) + \hat{j}\,(Y_2 - Y_1)$$

चूँकि $x_2 - x_1 = \Delta x$

BoardStudy

चूँकि $Y_2 - Y_1 = \Delta y$

अतः $\vec{\Delta r} = (\Delta x)\,\hat{i} + (\Delta y)\,\hat{j}$

3. वेग :- वस्तु के विज्ञापन और उसके संगत समयांतराल के अनुपात को वेग कहते हैं।

$$\text{वेग} = \frac{\text{विस्थापन}}{\text{समय}}$$

$$\vec{V} = \frac{\vec{\Delta r}}{\Delta t}$$

$$\because\ \vec{\Delta r} = (\Delta x)\,\hat{i} + (\Delta Y)\,\hat{j}$$

$$\vec{V} = \frac{\Delta x\,\hat{i} + \Delta y\,\hat{j}}{\Delta t}$$

$$\vec{V} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\,\hat{i} + \frac{\Delta y\,\hat{j}}{\Delta t}$$

$$\vec{V} = V_x\,\hat{i} + V_y\,\hat{j}$$

त्रिभुज OQP में ,
पाइथागोरस प्रमेय से

$$(\text{कर्ण})^2 = (\text{लम्ब})^2 + (\text{आधार})^2$$

$$V^2 = (v_x)^2 + (v_y)^2$$

$$V^2 = \sqrt{(v_x)^2 + (v_y)^2}$$

BoardStudy

$$tan\theta = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}} = \frac{QP}{OP}$$

$$tan\theta = \frac{\vec{Vy}}{\vec{Vx}}$$

$$\theta = tan^{-1}(\frac{\vec{Vy}}{\vec{Vx}})$$

4. त्वरण :- *किसी वस्तु के वेग मे परिवर्तन की दर को त्वरण कहते हैं। समतल तल मे गतिमान किसी वस्तु का औसत त्वरण वेग में परिवर्तन की दर के बराबर होता हैं।*

$$avg = \frac{\text{वेग मे परिवर्तन}}{\text{समयान्तराल}}$$

$$avg = \frac{\Delta V}{\Delta t}$$

इसलिए $\vec{V} = V_x \hat{i} + V_y \hat{j}$

$$avg = \frac{\Delta (V_x \hat{i} + V_y \hat{j})}{\Delta t}$$

$$avg = \frac{\Delta V_x \hat{i} + \Delta V_y \hat{j}}{\Delta t}$$

$$avg = \frac{\Delta V_x}{\Delta t} \hat{i} \frac{\Delta V_y}{\Delta t} \hat{j}$$

$$avg = a_x \hat{i} + a_y \hat{j}$$

5.तात्क्षणिक वेग :- *किसी क्षण विशेष पर वस्तु का वेग तात्क्षणिक वेग*

BoardStudy

कहलाता है।

$$V = \frac{dr}{dt}$$

इसलिए $\vec{r} = x\,\hat{i} + y\,\hat{j}$

$$\vec{v} = \frac{d\,(x\,\hat{i} + y\,\hat{j})}{dt}$$

$$\vec{v} = \frac{d\,(x\,\hat{i})}{dt} + \frac{d\,(y\,\hat{j})}{dt}$$

$$\vec{v} = \hat{i}\,\frac{dx}{dt} + \hat{j}\,\frac{dy}{dt}$$

तात्क्षणिक त्वरण :- किसी क्षण पर वस्तु मे उत्पन्न त्वरण तात्क्षणिक त्वरण कहलाता है।

$$a = \frac{dv}{dt}$$

इसलिए $\vec{v} = v_x\,\hat{i} + v_y\,\hat{j}$

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}\,(v_x\,\hat{i} + v_y\,\hat{j})$$

$$\vec{a} = \frac{d\,(V_x)\,\hat{i}}{dt} + \frac{d\,(v_y)\,\hat{j}}{dt}$$

$$\vec{a} = \hat{i}\,\frac{dv_x}{dt} + \hat{j}\,\frac{dv_y}{dt}$$

किसी समतल में आपेक्षिक वेग :- सरल रेखा के अनुदिश आपेक्षिक वेग की अभिधारणा से हम भली- भाति परिचित है। इस आपेक्षिक वेग

BoardStudy

को किसी समतल (द्विविमीय) या त्रिविमिय गति के लिए सरलता से विस्तृत कर सकते हैं। माना दो वस्तुएं A तथा B जिनके वेग क्रमशः V_A तथा V_B हैं।

तब वस्तु A के सापेक्ष B का वेग →

$$\vec{V}_{BA} = \vec{V}_B - \vec{V}_A$$

वस्तु B के सापेक्ष A का वेग →

$$\vec{V}_{AB} = \vec{V}_A - \vec{V}_B$$

एक समान वृतिय गति :- यदि कोई वस्तु एकसमान चाल से वृताकार प्रथ पर गति करे तो वस्तु की गति एकसमान वृतिय गति कहलाती हैं।

जब कोई वस्तु वृताकार पथ पर गति करती हैं तो वस्तु के वेग की दिशा लगातार परिवर्तित होती हैं। जिस कारण वस्तु का वेग परिवर्तित होता हैं।

BoardStudy