2025-2026

मात्रक मापन तथा त्रुटि विश्लेषण

कक्षा 11 भौतिकी

BoardStudy

मात्रक मापन तथा त्रुटि विश्लेषण

भौतिक राशियाँ :- वे सभी राशियाँ जिनका सम्बन्ध किसी भौतिकीय परिघटना से हो तथा उन्हें संख्या द्वारा व्यक्त किया जाए और साथ-साथ प्रत्यक्ष या अप्रत्यक्ष रूप में मापा जा सके भौतिक राशियाँ कहलाती हैं।
जैसे : लम्बाई , द्रव्यमान , समय, दाब, ताप, चाल, बल, वेग आदि ।

मूल राशियाँ :- विज्ञान में समस्त राशियों को **लम्बाई, द्रव्यमान , समय, ताप, ज्योतितीव्रता, विद्युत धारा** के पदो में मापा जाता है। ये राशियाँ मूल राशियाँ कहलाती है।

मापन :- मापन वह प्रक्रिया है जिसके द्वारा हम ज्ञात करते हैं कि कोई दी हुई राशि किसी मानक राशि का कितने गुना है।

मात्रक :- वह सर्वमान्य मानक जिसका उपयोग किसी भौतिक राशि की तुलना के लिए किया जाता है। उस भौतिक राशि का मात्रक कहलाता है।
जैसे: 1. लम्बाई का मात्रक ⇒ मीटर
2. द्रव्यमान का मात्रक ⇒ किलो ग्राम
3. समय का मात्रक ⇒ सेकण्ड

मापन की प्रणालियाँ :- भिन्न-भिन्न स्थानों पर मापन की अलग-अलग

प्रणालियाँ प्रयोग करते हैं जो निम्न प्रकार हैं।

1. M.K.S. प्रणाली (Metric System) :- इस प्रणाली में **लम्बाई को मीटर, द्रव्यमान को किलोग्राम, तथा समय को सेकण्ड** में मापते हैं।

2. C.G. S. प्रणाली (French system) :- इस प्रणाली में **लम्बाई को सेमी॰, द्रव्यमान को ग्राम में तथा समय को सेकण्ड** में मापते हैं।

3. F.P.S. प्रणाली (British system) :- इस प्रणाली में **लम्बाई को फुट में, द्रव्यमान को पौंड में तथा समय को सेकण्ड** में मापते है।

मापन की अन्तराष्ट्रीय प्रणाली [The S.I. System of Unit] :-

मापन की यह प्रणाली अन्तराष्ट्रीय स्तर पर मान्य है। संकेत रूप से इसे S.I प्रणाली कहते हैं। जब S.I का अर्थ "सिस्टम इंटरनेशनल डि यूनिट्स" System International 'd' units होता है।

यह प्रणाली सर्वप्रथम सन् 1971 मे माप तौल के महा सम्मेलन के बाद प्रकाश मे आयी थी । यह प्रणाली अन्तराष्ट्रीय माप तौल सम्मेलन में समय-समय पर की जाने वाली संस्तुतियो पर (Recommendation) पर आधारित हो गई हैं।

S.I प्रणाली मे सात मूल मात्रक होते है।

राशियाँ	**मात्रक**
लम्बाई	मीटर
द्रव्यमान	किलोग्राम
समय	सेकण्ड
ताप	कैल्विन
विद्युतधारा	ऐम्पियर
पदार्थ की मात्रा	मोल
ज्योतितीव्रता	कैण्डिला

इसमें दो पूरक मात्रक "रेडियन" तथा "स्टेरोडियन" दो मात्रक शामिल होते हैं।

∴ S.I. पद्धति में कुल मात्रक = मूल मात्रक + पूरक मात्रक

= 07 + 02

= 9

S.I. पद्धति में मूल राशियों तथा मूल मात्रकों की सारणीः-

मूल राशियों	**मूल मात्रक**	**प्रतीक**
लम्बाई	मीटर	M

द्रव्यमान	किलोग्राम	KG
समय	सेकण्ड	S
ताप	कैल्विन	K
विद्युत धारा	ऐम्पियर	A
पदार्थ की मात्रा	मोल	N_A
ज्योतितीव्रता	कैण्डिला	cd

लम्बाई का मापन

1. अत्यन्त छोटी दूरियों का मापन :- बहुत सूक्ष्म जैसे (अणुओं का व्यास, परमाणुओं का आकार) मापने के लिए विशेष विधि का उपयोग किया जाता है। जिनमें से कुछ विधियाँ इस प्रकार हैं।

(a) आवोगाद्रो परिकल्पना के उपयोग द्वारा परमाणु की त्रिज्या की गणना :- पदार्थ में परमाणु प्रबल आकर्षक बलों द्वारा बधे रहते हैं। आवोगाद्रो के अनुसार- "पदार्थ के 1 ग्राम परमाणु 6.023×10^{23} परमाणु होते हैं। ये परमाणु पदार्थ का लगभग 2/3 आपतन घेरते हैं।

माना पदार्थ का द्रव्यमान = m

पदार्थ का परमाणु भार = M

पदार्थ द्वारा घेरा गया आयतन = V

तथा माना परमाणु की त्रिज्या= r

तथा आवोगाद्रो की संख्या = N है।

अतः

। ग्राम पदार्थ में परमाणुओं की संख्या = N/M

$\therefore$ m ग्राम पदार्थ में परमाणुओं की संख्या= $m[\frac{N}{M}]$

एक परमाणु द्वारा घेरा गया आयतन = $\frac{4}{3} \text{Л} r^3$

$\therefore$ पदार्थ के सभी परमाणुओं द्वारा घेरा गया

आयतन = $m[\frac{N}{M}] \times \frac{4}{3} \text{Л} r^3$

$\because$ परमाणु पदार्थ का $\frac{2}{3}$ आयतन घेरते हैं।

$\therefore$ घेरा गया कुल आयतन = $\frac{2}{3}V$

$$\therefore m[\frac{N}{M}] \times \frac{4}{3} \text{Л} r^3 = \frac{2}{3}V$$

$$m[\frac{N}{M}] \times 2 \text{Л} r^3 = V$$

या $r^3 = \frac{Vm}{2\text{Л}mN}$

$$r = [\frac{Vm}{2\text{Л}mN}]^{1/3}$$

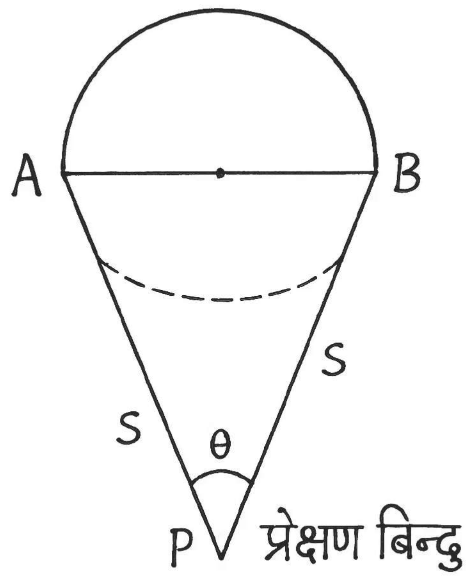
जहाँ आयतन = V, परमाणु भार = M, पदार्थ का द्रव्यमान = M, तथा आवोगाद्रो संख्या = N ज्ञात है। तो इसके माध्यम से परमाणु की त्रिज्या ज्ञात की जाती है।

2. अत्यन्त बड़ी दूरियों का मापन :- बहुत बड़ी दूरियाँ जैसे - "पर्वत

BoardStudy

की ऊँचाई, चन्द्रमा की पृथ्वी से दूरी " आदि का मापन कुछ प्रमुख विधियों से करते हैं। ऐसे मापन ये कोणीय माप के सहायक होते हैं;

(a) चन्द्रमा के व्यास की गणना :- माना पृथ्वी तल पर प्रेक्षण बिन्दु P है। यदि चन्द्रमा को दूरदर्शी द्वारा देखा जाये तो दूरदर्शी में चन्द्रमा का प्रतिबिम्ब एक वृत्तीय चकती के रूप में बनता है।



माना प्रेक्षण बिन्दु P पर चन्द्रमा के व्यास AB द्वारा बना कोण θ है।

माना चन्द्रमा का रेखीय व्यास = D

पृथ्वी की चन्द्रमा से माध्य दूरी = S

∵ हम जानते हैं

$$\text{कोण} = \frac{\text{चाप}}{\text{त्रिज्या}}$$

∵ चाप AB = D

त्रिज्या PA = PB = S

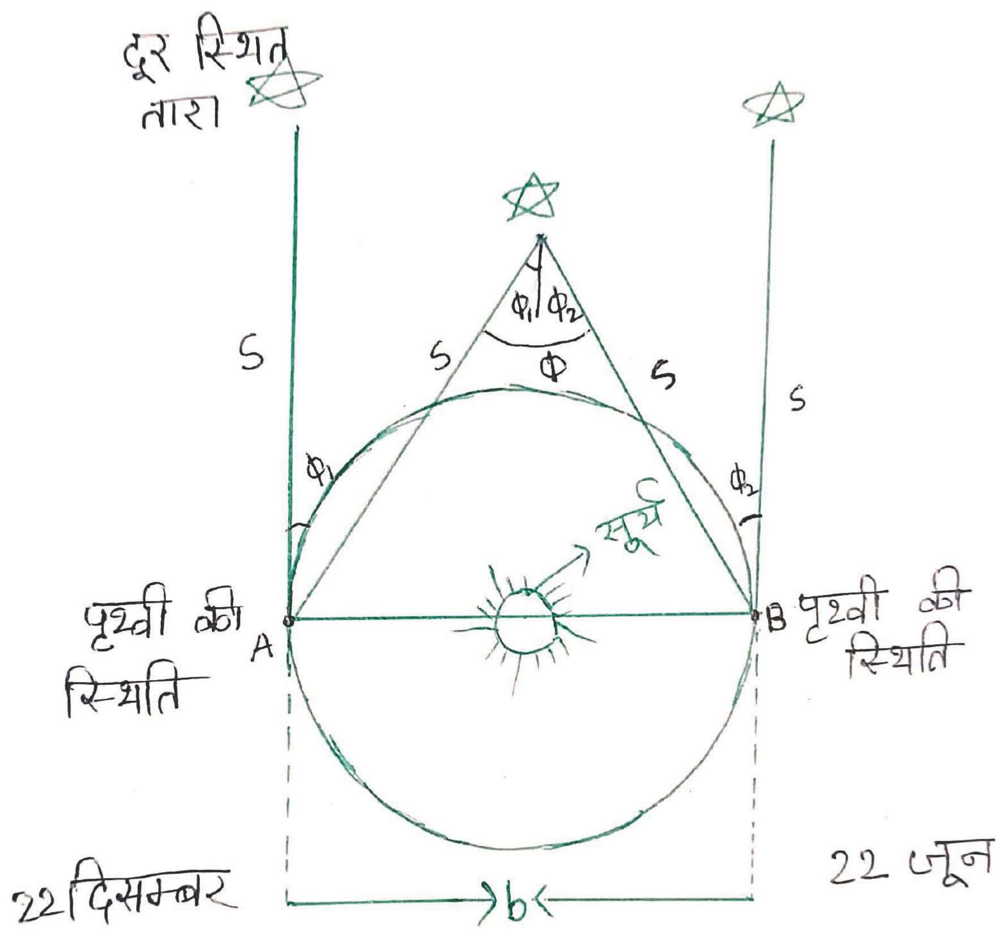
$$\therefore \text{कोण } (\theta) = \frac{D}{S}$$

या

$$D = S\theta$$

S ज्ञात होने पर कोण θ को मापकर व्यास चन्द्रमा का व्यास D ज्ञात किया जा सकता है।

(b) लम्बन विधि द्वारा खगोलीय पिण्डों की दूरी ज्ञात करना :- कुछ समीपवर्ती तारों (दूरी लगभग 100 प्रकाश वर्ष से कम) की पृथ्वी से दूरियाँ लम्बन विधि से ज्ञात कर सकते हैं। माना एक तारा S की दूरी पृथ्वी से ज्ञात करनी है। माना एक अन्य दूर स्थित तारा N स्थित तारा है।



माना 22 दिसम्बर को पृथ्वी की स्थिति A पर है।

अतः 6 माह बाद :- 22 जून को पृथ्वी की स्थिति B पर हो जाती है।

तारे N तथा S बीच का कोंण ϕ_1 है। (22 दिसम्बर को)

तथा N व S के बीच का कोण ϕ_2 है। (22 जून को)

$\because$ दोनों कोणों का योग $\phi = \phi_1 + \phi_2$

कोण ϕ को तारे का लम्बन कोण कहते है।

$\therefore$ हम जानते हैं।

$$\text{कोण} = \frac{\text{चाप}}{\text{त्रिज्या}}$$

$$\text{कोण} = \frac{\text{चाप } (AB)}{\text{पूरी } SA \text{ या } SB}$$

चित्रानुसार.

त्रिज्या SA = SB = तारे

S की पृथ्वी से दूरी = S

$$\therefore \quad \phi = \frac{AB}{S}$$

या $$\phi = \frac{b}{s}$$

या $$S = \frac{b}{\phi}$$

जहाँ b = सूर्य के परितः पृथ्वी की कक्षा का व्यास = लगभग 2Au.

1Au(Astronomical unit) = 1.5×10^{11} मीटर

$b = 2$ Au

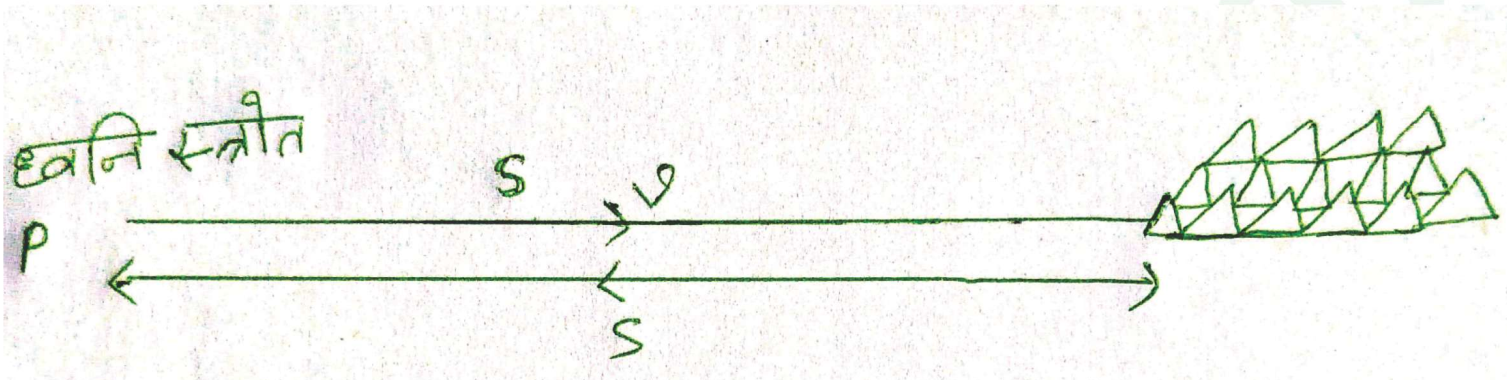
$b = 2 \times 1.5 \times 10^{11}$ मी

$b = 3 \times 10^{11}$

लम्बन कोण ϕ (रेडियन) में मापकर दूरी S की गणना कर सकते हैं।

(c) प्रतिध्वनि विधि अथवा परावर्तन विधि द्वारा बड़ी दूरी की गणना :-

किसी दूर स्थित पहाडी से सीधे परिवर्तन के आने के बाद आने वाली ध्वनि को प्रतिध्वनि कहते हैं। इस विधि से दूर स्थित पहाडी की दूरी ज्ञात की जा सकती है।



इस विधि में बन्दूक से दूर स्थित पहाडी की ओर छोडते हैं। गोली के छोड़ने तथा प्रतिबिम्ब या प्रतिध्वनि के सुनने के बीच के क्षणों का अन्तराल ज्ञात कर लेते हैं।

माना यह समयन्तराल t है।

माना ध्वनि की चाल v है।

ध्वनि द्वारा तय की गई कुल दूरी = S + S = 2S

हम जानते है

दूरी = चाल × समय

$2S = V.t$

$2S = V.t$

$$\boxed{S = \frac{vt}{2}}$$

(d) पृथ्वी से चन्द्रमा की दूरी ज्ञात की करने की लेजर (Laser) विधि :-

लेजर का अर्थ "Light Amplification by stimulated Emission of Radiation" है इसका हिन्दी अर्थ " विकरण के उद्दीप्त उत्सर्जन द्वारा प्रकाश का प्रवर्धन " है।

यह विधि प्रकाश के परावर्तन पर आधारित है। लेजर प्रकाश अत्यधिक तीव्रता वाला एक दैशिक तथा एक वर्णी प्रकाश है। यह प्रकाश एक सरल रेखा में बहुत अधिक दूरी तय कर सकता है। लेजर पुंज को चन्द्रमा की ओर भेजा जाता है। चन्द्रमा से परावर्तित यह प्रकाश पृथ्वी पर लौट आता है। लेजर पुंज के पृथ्वी से चन्द्रमा तक जाने तथा चन्द्रमा से पृथ्वी तक वापिस आने तक का समय नोट कर लेते हैं।

माना पृथ्वी से चन्द्रमा की दूरी = S

लेजर पुंज के चन्द्रमा तक जाने तथा वापस आने का समय t है।

∴ दूरी = चाल × समय

के अनुसार

लेजर पुंज की तय कुल दूरी = S + S = 2S

∴ लेजर पुंज की चाल = 3×10^8 मीटर/ सेकण्ड = 3×10^5 km/sec

$$\therefore \text{ चाल} = \frac{\text{दूरी}}{\text{समय}}$$

दूरी = चाल × समय

$$2S = c \cdot t$$

$$S = \frac{c.t}{2}$$

द्रव्यमान का मापन :- वस्तु का वह गुण जिससे वह अपनी अवस्था परिवर्तन का विरोध करती है। जणत्व कहलाती है। किसी वस्तु का द्रव्यमान उसके जणत्त्व की माप कहलाता है। माना M द्रव्यमान की वस्तु पर कार्यरत बल F है तथा वस्तु से उत्पन्न त्वरण a है तो

$F \propto m$ (नियत त्वरण a)

तथा। $F \propto a$ (नियत द्रव्यमान m)

$\therefore \quad F \times m.a$

$F = K.Ma$

प्रयोगों के अनुसार

$K = 1$

$F = M\,a$

$$F = Ma$$

तथा.

$$m = \frac{F}{a}$$

इस द्रव्यमान M को ही जणत्वीय द्रव्यमान कहते हैं।

गुरुत्वीय द्रव्यमान :- किसी भी वस्तु का भार (w) उसके द्रव्यमान (m) के

अनुक्रमानुपाती होता है।

$$w = Mg$$

$$w \propto m$$

अर्थात वस्तु के द्रव्यमान गुरुत्वीय द्रव्यमान है। जो प्रथ्वी के द्वारा उस वस्तु पर आरोपित बल को निर्धारित करता है । यदि किसी स्थान पर दो वस्तुओं के भार w_1 व w_2 है तो भार

$w = mg$ के अनुसार

$$w \propto m$$

$$\therefore w_1 \propto m_1$$

तथा $w_2 \propto m_2$

या

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{m_1}{m_2}$$

समीकरण में प्रतिशत द्रव्यमान को ही गुरुत्वीय द्रव्यमान कहते है।

समय का मापन :- समय का मापन घड़ी द्वारा किया है। अर्थात "वह घटना जो नियमित समयान्तराल के बाद स्वयं को दोहराती है। घड़ी का कार्य करती है।

इस प्रकार अपनी अक्ष के परितः पृथ्वी का घूमण सूर्य के परितः पृथ्वी का परिक्रमरण , सरल लोलक के डोलन , मनुष्य के हृदय की धड़कन तथा सीजीयम परमाणु के कंपन आदि विभिन्न प्रकार की घड़ियाँ है।

समय मापन की विधियाँ निम्नलिखित हैं :-

(i) सौर्य घड़ी :- यह सूर्य के परितः के निश्चित परिक्रमण पर आधारित है।

(ii) क्वटिज क्रिस्टल घड़ी :- यह दाब वैद्युत प्रभाव की घटना पर आधारित होती है। अर्थात जब क्वटिज पिस्टल के विपरीत पृक्ष्टो पर दाब लगाते है, तो विद्युत वाहक बल उत्पन्न हो जाता है। इस प्रकार उत्पन्न दोलन समयान्तराल को मापने में प्रयोग किए जाते है। इन घडियो की यथार्थता 10^9 sec मे एक 1 sec होती है।

परमाणु घड़िया :- परमाणु घडिया परमाणु में होने वाले परमाणु आवर्तो पर आधारित होती है। पहली परमाणु C.G.M. घड़ी सन् 1964 ई० बनाई गयी इनकी यथार्थता 10^{11} sec मे 1 sec होती है।

रेडियो एक्टिव डेटिंग :- कुल रेडियो एक्टिव नामिक में कार्बन C (14) स्वतं. ही विघटित होते रहते है। ये प्रक्रियायें 10^{17} sec के कोटि के बहुत बडे समयान्तराल को मापने में प्रयोग किये जा सकते है।
जैसे :-जीवास्म, चट्टानो तथा पृथ्वी आदि की आयु आदि इसी विधि से ज्ञात की जा सकती है।

लम्बाई के कुछ महत्वपूर्ण मालक छोटे तथा बड़े :-

1. एक फर्मी = 10^{-15} m
2. एक माइक्रोन = 1 u = 10^{-6} m

3. एक एंगस्ट्रॉम = $1A = 10^{-10}$ m

4. 1AU = सूर्य से पृथ्वी की औसत दूरी = 1.496×10^{11}

खगोलिय मात्रक :- सूर्य से पृथ्वी की औसत दूरी

$1AU = 1.496 \times 10^{11}$ मी॰

$1AU = 1.5 \times 10^{11}$ मी॰

प्रकाश वर्ष (1Ly) :- प्रकाश द्वारा 1 वर्ष मे चली गई दूरी अपने वेग 3×10^{8} m/s के द्वारा 1 वर्ष मे तय की गई दूरी को प्रकाश कहते है।

We know that,

दूरी = चाल x समय

∴ 1 प्रकाश वर्ष = प्रकाश की चाल (c) x समय(1 वर्ष)

$= 3 \times 10^{8}$ मी॰ x 365x 24 x 3600

$= 3 \times 10^{8}$ मी॰ x 365 x 24 x 3600

$= 946080 \times 10^{10}$ मी॰

$= 9.46 \times 10^{15}$ मी॰

$1Ly = 9.46 \times 10^{15}$ मी या $1Ly \approx 10^{16}$ मी०

Note :- प्रकाश वर्ष दूरी मापने का मात्रक है।

1 माइक्रोन = एक मीटर का इस दस लाखवों भाग

$1\ \mu = \frac{1}{1000\,000}$ मी॰ $= \frac{1}{10^6}$ मी॰

$1\ \mu = 10^{-6}$ मी॰

→ एक एक्स मात्रक = 10^{-13} मी॰

→ एक पारसेल = वह दूरी जिस पर पृथ्वी की कक्षा की औसत त्रिज्या 1 आर्क सेकण्ड का कोण अन्तरित करे । पारसेल कहलाती है।

1 पारसेल = 3.08×10^{16} मी॰

द्रव्यमान के छोटे बड़े मात्रक :-

(i) 1 kg = $^{12}C_6$ के 5.0188×10^{25} परमाणुओ का द्रव्यमान होता है।

(ii) 1 kg = $1000g = 10^3\ g$

(iii) 1g = $\frac{1}{1000}$ किग्रा॰ $= 10^{-3}\ kg$

(iv) 1 मिलीग्राम = $\frac{1}{1000}\ g = 10^{-3}$ ग्राम $= 10^{-6}$ किग्रा॰

(v) 1 माइक्रोग्राम = $10^{-9}\ kg$

(vi) 1 (क्विंटल) = $100\ kg$

$= 10^2\ kg$

(vii) 1 मिट्रिक टन = 10 क्विंटल

= 10×100 kg

= 1000 kg

= 10^3 kg

समय के छोटे व बड़े मात्रक :-

1. 1 मिली. सेकण्ड = $\frac{1}{1000}$ = 10^{-3} सेण्ड

2. 1 एक माइक्रो सेकण्ड = 1 / 1000000= 10^{-6} सेकेण्ड

3. 1 नैंनो सेकेण्ड = 10^{-9} सेकेण्ड

4. 1 पिको सेकण्ड = 10^{-12} सेकेण्ड

5. 1 घण्टा = 60 मिनट

= 60×60 सेकेण्ड

= 3600 सेकेण्ड

6. एक सौर दिवस :- एक दोपहर से दूसरे दोपहर के बीच समय को एक सौर दिवस कहते है।

एक सौर दिवस = 24 घण्टे × 3600 सेकण्ड

= 86400 sec

7. 1 वर्ष = $365 \frac{1}{4}$ दिन = $\frac{1461}{4}$ दिन

= $\frac{1461}{4} \times 24 \times 3600$ सेकेण्ड

= $1461 \times 6 \times 3600$ सेकेण्ड

= 31557600 सेकेण्ड

= 3.15576×10^7 सेकेण्ड

∴ एक वर्ष = 3.15576×10^7 सेकेण्ड

एक लीप वर्ष :- वह वर्ष जिसके फरवरी माह में एक अतिरिक्त दिन अर्थात 29 दिन तो वह वर्ष लीप वर्ष कहलाती है। यह वर्ष हर चौथे वर्ष बाद पड़ता है।

1 लीप वर्ष = 366 दिन

एक दशक :- = 10 वर्ष

= 10x 1 वर्ष

= $10 \times 3.155 \times 10^7$ sec

= 3.155×10^8 सेकण्ड

अनिश्चितता :- किसी भी भौतिक राशि को मापने के लिए मापक यंत्र का प्रयोग किया जाता है। ex :- लम्बाई मापने के लिए मीटर पैमाना , वर्नियर कैल्पिर्स , स्क्रूगेज (पेचमापी) आदि का प्रयोग किया जाता है। अर्थात किसी माप मे अनिश्चितता का मान उस मान के न्यूनतम तथा अधिकतम मानो के अन्तर के बराबर अर्थात प्रयोग किए गए मापक यन्त्रो के अल्पतमांक के बराबर होता है।

अल्पतमांकः- किसी भी मापक यन्त्र द्वारा मापी जा सकने वाली न्यूनतम माप को उस मापक यन्त्र का अल्पतमांक कहते हैं।

Ex (1) वर्नियर कैल्पिर्स का अल्पतमांक 0.1 मिमी. या 0.01 मिली. या cm

होता है।

(2) मीटर पैमाने का (अल्पतमांक) अल्पतमांक 1 mm या 0.1 cm होता है

(3) स्क्रूगेज का अल्पतमांक 0.01 मी॰ मी॰ अथवा 0.001 cm होता है।

प्रेरक्षण की त्रुटि :- प्रेरक्षण की त्रुटि को दो प्रकार से परिभाषित किया जा सकता है।

सम्भावित त्रुटि या निरपेक्ष त्रुटि या परम त्रुटि :- यदि किसी भौतिक राशि का यर्थाथि मान x तथा मापक यन्त्र द्वारा प्रेक्षित मान x_0 हो तथा प्रेक्षण की त्रुटि Δx हो तो

$$\Delta x = x_0 - x$$

(A) Δx का मान धनात्मक अथवा ऋणात्मक हो सकता है। अथवा शून्य कभी नही हो सकता है।

(B) यर्थाथि मान $x = x_0 - \Delta x$

Δx को चिन्ह सहित घटा देते है।

$$\boxed{x = x_0 - \Delta x}$$

भिन्नात्मक त्रुटि अथवा सापेक्ष त्रुटि अथवा आपेक्षित त्रुटि :- माना किसी भौतिक राशि का यर्थाथि मान a है। तथा निरपेक्ष मान त्रुटि Δa हो तो a निरपेक्ष त्रुटि तथा यर्थाथि मान के अनुपात को भिन्नात्मक त्रुटि कहते है।

$\because$ भिन्नात्मक त्रुटि = $\frac{\text{निरपेक्ष त्रुटि}}{\text{यर्थाथ मान}}$

$\therefore$ भिन्नात्मक त्रुटि = $\frac{\Delta a}{a}$

$\therefore$ प्रतिशत में भिन्नात्मक त्रुटि = $\frac{\Delta a}{a} \times 100$

परिशुद्धता :- परिशुद्धता वह शब्द है, जो किसी वस्तु की एक माप की उस वस्तु की अन्य मापों से निकटता प्रदर्शित करने के लिए प्रयुक्त किया जाता है।

परिशुद्धता प्रयुक्त किये गये मापक यन्त्र के अल्पतमांक के द्वारा निश्चित की जाती है

अर्थात

$$\text{परिशुद्धता} \propto \frac{1}{\text{अल्पतमांक}}$$

त्रुटियों का संयोजन :- किसी प्रयोग के फल को सदैव अधिकतम् सम्भावित त्रुटि ही ज्ञात की जाती है। अर्थात त्रुटियों के संयोजन मे विभिन्न त्रुटियों का सदैव योग ही किया जाता है, अन्तर कभी नही होता है।

1)योग में :- यदि दो राशियों A तथा B की मापे क्रमशः $(a+\Delta a)$ तथा $(b+\Delta b)$ हो तो योग में अधिकतम सम्मद निरपेक्ष त्रुटि अथवा सापेक्ष त्रुटि को ज्ञात करने के लिए इन राशियों के मापों के योगफल को $X \pm \Delta X$ के रूप में लिखने पर

$\therefore X \pm \Delta X = (a \pm \Delta a) + (b \pm \Delta b)$

$= (a + b) \pm (a \pm \Delta b)$

$= (a + b) \pm (\Delta a + \Delta b)$

यर्थाथ मान   अधिकतम त्रुटि

अतः $X = (a+b)$ तथा $(\Delta a + \Delta b)$

अतः दोनों राशियों का योग = $a+b$

योगफल मे अधिकतम त्रुटि या सम्भावित त्रुटि

$=(\Delta a + \Delta b)$

∴ योग में अधिकतम सापेक्ष त्रुटि :- $[\frac{\Delta a + \Delta b}{a + b}]$

∴ अधिकतम सापेक्ष त्रुटि % में :- $(\frac{\Delta a + \Delta b}{a + b}) \times 100\%$

2)घटाने पर :- एक राशि A मे से राशि B को घटाने पर फल हों अधिकतम सम्भावित त्रुटि ज्ञात करने के लिए इन राशियो के मापो के अन्तर को $(y \pm \Delta y)$ के रूप मे लिखने पर

∴ $(y \pm \Delta y) = (a \pm \Delta a) - (b \pm \Delta b)$

$= (a - b) \pm (\Delta a - \Delta b)$

$(y \pm \Delta y) = (a - b) \pm (\Delta a + \Delta b)$

माप   अधिकतम सम्भावित त्रुटि

निरपेक्ष त्रुटियों का सदैव योग होता है।

∴ $y = (a-b)$, $\Delta y = \Delta a + \Delta b$

अतः राशि (A)-राशि (B) का मान = $a - b$

∵ घटाने पर अधिकतम सम्भावित त्रुटि = $\Delta a + \Delta b$

∴ घटाने पर अधिकतम सापेछ त्रुटि = $(\frac{\Delta a + \Delta b}{a - b})$

अतः अधिकतम सापेक्ष त्रुटि प्रतिशत मे

$$= [\frac{\Delta a + \Delta b}{a - b}] \times 100\%$$

3) गुणनफल में :- माना किसी प्रयोग में फल $y = ab$ है।

जहाँ a व b = योगो द्वारा ली गई ; y = प्राप्त फल

यदि a व b की मापन में त्रुटियो क्रमशः $\pm \Delta a$ तथा $\pm \Delta b$ हो तो फल y मे त्रुटि

$\Delta y = (a \pm \Delta a)\ (b \pm \Delta a) - ab$

$\Delta y = ab \pm a\Delta b \pm b\Delta a \pm \Delta a\Delta b - ab$

$\Delta y = \pm a\Delta b \pm b\Delta a \pm \Delta a\Delta b$

बहुत छोटे पदो $(\Delta a.\Delta b)$ को छोड़ देने पर

$\Delta y = \pm a\Delta b \pm b\Delta a$

y के मापन मे भिन्नात्मक

$$\frac{\Delta y}{y} = \frac{\pm a\Delta b \pm b\Delta a}{ab}$$

$$\frac{\Delta y}{y} = \pm \frac{a\Delta b}{ab} \pm \frac{b\Delta a}{ab}$$

$$\frac{\Delta y}{y} = \pm \frac{\Delta b}{b} \pm \frac{\Delta a}{a}$$

∴ अधिकतम संभावित प्रतिशत भिन्नात्मक त्रुटिं

$$\left|\frac{\Delta y}{y}\right|_{max} \times 100\% = \left(\pm \frac{\Delta a}{a} \pm \frac{\Delta b}{b}\right) \times 100\ \%$$

$$\therefore \left|\frac{\Delta y}{y}\right|_{max} \times 100\% = \pm \frac{\Delta a}{a} \times 100\% \pm \frac{\Delta b}{b} \times 100\ \%$$

विशेष नोट :- माना किसी प्रयोग में अज्ञात राशि y का मान निम्न राशियों a, b तथा c निम्न प्रकार निर्भर करता है।

$$y = \frac{a^2 b}{c^2}$$

अथवा

$$y = a^2 b\ c^{-2}$$

$\therefore$ y के मान ये भिन्नात्मक त्रुटि.

$$\frac{\Delta y}{y} = 2\left(\frac{\Delta a}{a}\right) + \left(\frac{\Delta b}{b}\right) - 2\left(\frac{\Delta c}{c}\right)$$

$\therefore$ y के मान में अधिकतम संभावित भिन्नात्मक त्रुटि -

$$\left|\frac{\Delta y}{y}\right|_{max} = 2\left(\frac{\Delta a}{a}\right) + \left(\frac{\Delta b}{b}\right) - 2\left(\frac{\Delta c}{c}\right)$$

$$\left|\frac{\Delta y}{y}\right|_{max} = 2\left(\frac{\Delta a}{a}\right) + \left(\frac{\Delta b}{b}\right) + 2\left(\frac{\Delta c}{c}\right)$$

$\therefore$ y के मान में अधिकतम संभावित प्रतिशत त्रुटि:-

$$\left|\frac{\Delta y}{y}\right|_{max} \times 100\% = 2\left(\frac{\Delta a}{a}\right) \times 100\% + \left(\frac{\Delta b}{b}\right) \times 100\% + 2\left(\frac{\Delta c}{c}\right) \times 100\%$$

इस त्रुटि को अनुमेय त्रुटि भी कहते हैं।

सूत्र $y = \frac{a^2 b}{c^2}$ को निम्न विधि से भी भिन्नात्मक प्रतिशत त्रुटि ज्ञात कर सकते हैं।

$$y = \frac{a^2 b}{c^2}$$

$$y = a^2 b c^{-2}$$

दोनों पक्षों का लघुगणक लेने पर -

$\log y = 2 \log a + \log b - 2 \log c$

उपरोक्त समीकरण का आंशिक अवकलन करने पर

$$\left|\frac{\Delta y}{y}\right|_{max} = 2\left(\frac{\Delta a}{a}\right) + \left(\frac{\Delta b}{b}\right) - 2\left(\frac{\Delta c}{c}\right)$$

∴ y के मान में अधिकतम भिन्नात्मक त्रुटि :

$$\boxed{\left|\frac{\Delta y}{y}\right|_{max} = 2\left(\frac{\Delta a}{a}\right) + \left(\frac{\Delta b}{b}\right) - 2\left(\frac{\Delta c}{c}\right)}$$

प्रयोग में प्रतिशत त्रुटि प्रायोगिक प्रतिशत त्रुटि का मान निम्न प्रकार से ज्ञात कर सकते हैं।

किसी भी राशि का एक प्रमाणित मान होता है। तथा प्रयोग प्राप्त मान को प्रायोगिक मान कहते हैं।

अतः

$$\text{प्रायोगिक प्रतिशत त्रुटि} = \frac{\text{प्रमाणितमान} \backsim \text{प्रायोगिक मान}}{\text{प्रमाणित मान}} \times 100\%$$

जैसे : 1. लोहे का घनत्व 7.84% ग्राम/सेमी^{3} है तथा प्रयोग कर्ता ने इसका मान 8.10 ग्राम/सेमी^{3} ज्ञात किया है। प्रायोगिक प्रतिशत त्रुटि ज्ञात करो।

Ans :- प्रश्न अनुसार

घनत्व का प्रमाणित मान = 7.88 ग्राम/सेमी^{3}

घनत्व का प्रायोगिक मान = 8.10 ग्राम/सेमी^{3}

$$\therefore \text{ प्रायोगिक प्रतिशत त्रुटि } = \left[\frac{\text{प्रमाणितमान} \sim \text{प्रायोगिक मान}}{\text{प्रमाणित मान}}\right] \times 100\%$$

$$= \left[\frac{7.88 \sim 8.10}{7.88}\right] \times 100\%$$

$$= \left[\frac{0.22}{7.88}\right] \times 100\%$$

$$= \frac{22}{788} \times 100\%$$

$$= \frac{2200}{788} \%$$

$$= 2.79\%$$

सार्थक अंक :- किसी भी राशि के मापन मे सम्मिलित सभी विश्वनीय तथा एक सदिग्ध अंक सार्थक अंक कहलाते हैं।

जैसे :- किसी छड की लम्बाई 14.5 cm है। मीटर स्केल से इस लम्बाई को मापेंगें मीटर स्केल का विभेदन 0.1 है। प्राप्त परिणाम 14.5 cm है। विश्वस्तीय अंक 1 व 4 तथा संदिग्ध अंक 5 हैं।

सार्थक अंक ज्ञात करने के नियम :-

1. सभी अशून्य संख्यायें सार्थक अंक होती हैं।

जैसे: 4143.28

सार्थक अंक = 6

2. दो अशून्य संख्याओं का बीच का शून्य सार्थक अंक होता है।
जैसे :- 2807.05
सार्थक अंक = 6

3. दशमलव के बायीं ओर कोई शून्य हो तो दशमलव के बाद तुरन्त बाद के शून्य सार्थक में नहीं गिने जायेंगे।
जैसे: 0.0028
सार्थक अंक= 2

4. कोई संख्या ऐसी जिसमें दशमलव न हो उस संख्या के अंतिम अथवा अनुगामी (आगे आने वाले) शून्य सार्थक अंक नहीं होते हैं।
जैसे :- 1. खेत की लम्बाई = 124 मीटर
सार्थक अंक = 3 मीटर
2. खेत की लम्बाई= 124 × 100 सेमी
= 12400 सेमी॰
सार्थक अंक = 3
3. खेत की लम्बाई = 1240000 मिमी॰
सार्थक अंक = 3

5. ऐसी संख्या जिसमें दशमलव बिन्दु हो तथा दशमलव के तुरन्त बाद कोई अशून्य अंक हो तो उसके बाद के अनुगामी शून्य सार्थक अंक होते हैं।
जैसे: 4.5800

सार्थक अंक = 5.

Points to be noted:-

1. $r = [\frac{VM}{2\pi MN}]^{1/3}$

2. $D = S\theta$

3. $S = \frac{b}{\phi}$

4. $S = \frac{vt}{2}$

5. $S = \frac{ct}{2}$

6. $F = Ma$

7. $\frac{W_1}{W_2} = \frac{M_1}{M_2}$

8. 1Ly = 9.46×10^{15} metre

9. 1 पारसेल = 3.08×10^{16} मीटर

10. 1 ग्राम = $\frac{1}{1000}$ किलोग्राम = 10^{-3} kg

11. 1 मिलीग्राम = 10^{-6} kg

12. 1 माइक्रोग्राम = 10^{-9} kg

13. 1 क्विंटल = 100 kg = 10^{2} kg

14. 1 मिलीटन = 1000 kg = 10^{3} kg

15. 1 मिलीसेकण्ड = $\frac{1}{1000}$ = 10^{-3} सेकण्ड

16. 1 माइक्रो सेकण्ड = $\frac{1}{1000000}$ = 10^{-6} सेकण्ड

17. 1 नैनोसेकेण्ड = 10^{-9} सेकण्ड

18. 1 पिकोसेकण्ड = 10^{-12} सेकण्ड

19. 1 घण्टा = 60 मिनट = 3600 सेकण्ड

20. 1 सौर दिवस = 24 घण्टे × 3600 सेकण्ड

21. 1 वर्ष = 3.15576 x 10^7 सेकण्ड

21. 1 लीप वर्ष = 366 दिन

22. 1 दशक = 3.1555 x 10^7 x 100 सेकण्ड

23. प्रतिशत में भिन्नात्मक त्रुटि = $(\frac{\Delta a}{a})$ x 100%

24. $\left|\frac{\Delta y}{y}\right|_{max}$ x 100% = $\pm \frac{\Delta a}{a}$ x 100% $\pm \frac{\Delta b}{b}$ x 100 %

25. $\left|\frac{\Delta y}{y}\right|_{max}$ x 100% = $2(\frac{\Delta a}{a})$x 100% + $(\frac{\Delta b}{b})$x 100% +$2(\frac{\Delta c}{c})$x 100%

26. $\left|\frac{\Delta y}{y}\right|_{max} = 2(\frac{\Delta a}{a}) + (\frac{\Delta b}{b}) + 2(\frac{\Delta c}{c})$

27. प्रायोगिक प्रतिशत त्रुटि =[$\frac{\text{प्रमाणितमान} \backsim \text{प्रायोगिक मान}}{\text{प्रमाणित मान}}$] x 100%